Name:
Matrikelnummer:

TU Dortmund 28.02.2024

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Klausur 1

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten
- Die Klausur umfasst 8 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und auf das Deckblatt zusätzlich Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: Vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**		**Σ**
von 12	von 8	von 16	von 14	von 14	von 8	von 14	von 14		von 100

Name:

Aufgabe 1. [12 Punkte]
Es seien $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ und $v\colon M \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

a) $\nabla \cdot (f\,\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\,\Delta g\,.$

b) $\nabla \cdot \operatorname{rot}(v) = 0\,.$

c) $\operatorname{rot}(f\,v) = (\nabla f) \times v + f\operatorname{rot}(v)\,.$

Name:

Aufgabe 2. [8 Punkte]
Formulieren Sie den *Satz von Gauß* (alle Variablen und Symbole müssen stichpunktartig beschrieben werden).

Name:

Aufgabe 3. [16 Punkte]
Gegeben seien die Abbildung $\Phi\colon [0,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,t) := (r\cos(t), r\sin(t), r^2)$ und die Fläche $P := \Phi([0,2] \times [0,\pi])$ mit Einheitsnormalenvektor n, der eine positive x_3-Komponente hat. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x_1,x_2,x_3) := (x_1 - x_2\,,\, x_3 - x_2\,,\, 0)$$

das Integral $\int_P \operatorname{rot}(v)\cdot n \,\mathrm{d}S$

a) direkt, mit der Formel für Flächenintegrale.

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Name:

Aufgabe 4. [14 Punkte]
Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$. Diese wird auch interpretiert als eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Für $z = x + \mathrm{i}y$ setzen wir $f(z) := f_1(x, y) + \mathrm{i}f_2(x, y)$. Weiterhin sei eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ gegeben, die mit der differenzierbaren Abbildung $\gamma\colon [0, T] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert ist. Wir identifizieren mit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ und mit $\gamma\colon [0, T] \to \mathbb{C}$.

a) Geben Sie die Definition des (reellen, vektorwertigen) Wegintegrals $\int_\Gamma f \in \mathbb{R}^2$ an. *Hinweis:* Dies ist der Vektor, dessen Einträge die skalaren Wegintegrale über die Komponenten von f sind.

b) Geben Sie die Definition des (reellen) vektoriellen Wegintegrals $\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ an.

c) Geben Sie die Definition des komplexen Wegintegrals $\int_\Gamma f \,\mathrm{d}z \in \mathbb{C}$ an.

d) Wann heißt eine Funktion $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine (komplexe) Stammfunktion von f?

e) Sei f gegeben. Unter welcher Voraussetzung gibt es eine Stammfunktion F?
Die Antwort soll eine Charakterisierung mit komplexen Wegintegralen verwenden.

Name:

Aufgabe 5. [14 Punkte]
Wir betrachten $B_4(0) \subset \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Wegintegrale

a) $$\int_{\partial B_4(0)} \frac{\cos(3z)}{z(z-\pi)} \,\mathrm{d}z\,.$$

b) $$\int_{\partial B_4(0)} \frac{\cos(3z)}{z(z-\pi)^2} \,\mathrm{d}z\,.$$

Name:

Aufgabe 6. [8 Punkte]
Wir betrachten den Hilbertraum $X := L^2((0,\pi),\mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

und für $k \in \mathbb{Z}$ die Basisfunktionen $e_k\colon (0,\pi) \to \mathbb{C},\ e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{2\mathrm{i}kx}$.
Zeigen Sie, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in X ist.

Name:

Aufgabe 7. [14 Punkte]
Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion

$$f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\,,\ \ f(x) := x(\pi - |x|)\,.$$

Name:

Aufgabe 8. [14 Punkte]
Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$y'' - 2y' + y = \cos(3x)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0 = y(\pi)$.
Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung der partikulären Lösung den Ansatz

$$y_p(x) = p_1 \cos(3x) + p_2 \sin(3x).$$

Name:
Matrikelnummer:

Name:
Matrikelnummer: