2. Klausur zur Analysis II – 22.9.2014

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Heida

Aufgabe 1: (12P – Für die Teilaufgaben: a: 4P, b: 8P)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Raum $C([0,1];\mathbb{R})$ sei der Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Ohne Begründung)

(i) Ist f stetig auf einer kompakten Menge K, so nimmt $f|_K$ sein Maximum an.

(ii) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

(iii) Ist f partiell differenzierbar, so ist f differenzierbar.

(iv) Ist f stetig und beschränkt, so nimmt f sein Minimum an.

(v) Ist f differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen.

(vi) Ist f stetig, so sind alle Urbilder kompakter Mengen kompakt.

(vii) Ist f stetig, so sind Bilder kompakter Mengen kompakt.

(viii) Jede beschränke und abgeschlossene Teilmenge von $C([0,1];\mathbb{R})$ ist kompakt.

b) Geben Sie zu vier der obigen Aussagen ein Gegenbeispiel an (ohne Beweis).

Aufgabe 2: (10P – Für die Teilaufgaben: 6P, 4P)

a) Auf $\mathbb{R}^n$ seien die Normen $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$ und $\|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$ gegeben. Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|_1\,.$$

Bestimmen Sie die optimalen Konstanten a und b.

b) Gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ mit $\|x - y\| = 2$ für alle $x \neq y$? Gibt es eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $d(x,y) = 2$ für alle $x \neq y$? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3: (10P – 5P je Teilaufgabe)

a) Es sei $N := \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Ist N offen? abgeschlossen? kompakt? Begründen Sie ihre Aussagen. Bestimmen Sie zusätzlich ∂N.

b) Sei $X = C^0([0,1],\mathbb{R})$ und $M := \{f \in X \mid f(x) > 0\ \forall x \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass M offen ist in X.

Aufgabe 4: (10P – Für die Teilaufgaben: a: 4P, b: 6P)

a) Formulieren Sie den Banach'schen Fixpunktsatz.

b) Welche der Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes sind erfüllt und welche sind verletzt bei den Funktionen

$$\begin{aligned}
T_1 :&\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && x \mapsto x + 1\,,\\
T_2 :&(0,1) \to (0,1)\,, && x \mapsto \frac{1}{2}x\,,\\
T_3 :&[0,1] \to [0,1]\,, && x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (10P – 5P je Teilaufgabe)

a) Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ eine Cauchyfolge und sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ so dass $x_{n_k}\to x$ für ein $x\in X$. Zeigen Sie: $x_n \to x$.

b) Zeigen Sie: Jeder kompakte metrische Raum (X,d) ist vollständig.

Aufgabe 6: (8P – je 4P pro Teilaufgabe)

Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ die Funktion $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x\sin(y+z)\\ \cos(x^2+y^2+z^2)\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Ableitung von $Df(x,y,z)$ im $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie in $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ die Richtungsableitung $D_vf(x,y,z)$ von f in Richtung des Vektors $v=(0,1,1)$.

Aufgabe 7: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

Sei $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x,y,z>0\,,\ xy<2\pi\}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$f:\,U\to\mathbb{R}^3\,,\ f(x,y,z)=(z\cos(xy),z\sin(xy),x)\,.$$

a) Berechnen Sie die Jacobideterminante $\det Df(x,y,z)$ für alle $(x,y,z)\in U$.

b) Die Abbildung f ist injektiv, dies dürfen Sie voraussetzten. Begründen Sie, dass für $V=f(U)$ die Umkehrabbildung $g:\,V\to U$ differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung von g im Punkt $(-1,0,\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2},2\pi,1)$.

Aufgabe 8: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

a) Sei E die Ellipse

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\frac{x^2}{4}+y^2=1\right\}\,.$$

Zeigen Sie, dass E eine Mannigfaltigkeit ist.

b) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y)=xy$ auf E.

Aufgabe 9: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

a) Berechnen Sie die Länge $L(\alpha)$ des Weges $\alpha:\ [0,1]\to\mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t)=(t\cos(t),t\sin(t))$. Tip: Zeigen Sie, dass $|\alpha'(t)|=\sqrt{1+t^2}$ und verwenden Sie die Substitution $t=\sinh x$ sowie die Darstellung $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

b) Berechnen Sie das Wegintegral der Funktion $g(x,y)=1/\sqrt{x^2+y^2+1}$ entlang α.

Aufgabe 10: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

a) Bestimmen Sie die Lösung $z(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$z'=\frac{2t}{t^2+1}z\,,\qquad z(0)=1\,.$$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$y'=\frac{2t}{t^2+1}y+t^2+1\,,\qquad y(0)=2$$

mit dem Ansatz $y(t)=u(t)\,z(t)$, wobei $z(t)$ die Lösung aus Teil a) ist.