1. Klausur zur Analysis II – 22.7.2014

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Heida

Aufgabe 1: (12P – Für die Teilaufgaben: a: 4P, b: 8P)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Ohne Begründung)

(i) f ist stetig $\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar.

(ii) f ist partiell differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig.

(iii) f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und $f(x_1) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \Rightarrow \nabla f(x_1) = 0$.

(iv) f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ f ist total differenzierbar.

(v) f ist stetig $\Rightarrow$ f nimmt sein Maximum an.

(vi) alle Richtungsableitungen von f in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

(vii) f ist total differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig.

(viii) f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und $f(x_1) = \max_{x\in G} f(x)$ $\Rightarrow \nabla f(x_1) = 0$.

b) Geben Sie zu vier der obigen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2: (10P – Für die Teilaufgaben: 3P, 3P, 4P)

a) Berechnen Sie den Abstand der Punkte $(1, 2, 3)^T$ und $(3, 2, 1)^T$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

b) Sei $X = C^0([0, 2], \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_\infty$. Es seien $f, g \in X$ gegeben durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = 1 - x$. Bestimmen Sie $d(f, g) = \|f - g\|_X$.

c) Es sei X wie in b) und $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 2]$ und

$$f_n(x) := \begin{cases} 2nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2 - 2nx & \text{für } \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gilt $f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ für $n \to \infty$? Falls nicht: Konvergiert f_n in X gegen eine andere Grenzfunktion? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3: (10P – Für die Teilaufgaben: 2P, 5P, 3P)

Es sei $A := [0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Heine–Borel, dass A nicht kompakt ist.

b) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Heine–Borel, dass A nicht kompakt ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine stetige, surjektive Abbildung $f : [0, 1] \to A$ gibt.

Aufgabe 4: (14P – je 7P pro Teilaufgabe)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \sin(y) \exp(\cos(x)) + z^2$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Finden Sie einen kritischen Punkt von f, in dem f weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum annimmt.

Aufgabe 5: (12P)

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y, z) := (1 + y)\cos x + e^z \sin y + xz$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ und V von $z_0 = 0$ eindeutig nach z auflösbar ist. D.h. es gibt eine differenzierbare Funktion $\varphi : U \to V$ mit $\varphi(\frac{\pi}{2}, 0) = 0$, so dass $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$. Berechnen Sie $D\varphi(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Aufgabe 6: (12P – je 4P pro Teilaufgabe)

Für Konstanten $a, b > 0$ seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = |a\,x_1^2 + b\,x_2^2 - 1|^2 \quad \text{und} \quad g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)(x_2 + 2)\,.$$

Wir betrachten

$$M_f := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}\,, \qquad M_g := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 0\}$$

a) Ist M_f eine Mannigfaltigkeit? Beweisen Sie Ihre Aussage.

b) Ist M_g eine Mannigfaltigkeit? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Bestimmen Sie zu $x = (\frac{1}{\sqrt{a}}, 0) \in M_f$ und $y = (1, 1) \in M_g$ und $z = (-2, 1) \in M_g$ die Tangentialräume $T_x M_f$ und $T_y M_g$ und $T_z M_g$, falls diese existieren.

Aufgabe 7: (12P – je 4P pro Teilaufgabe)

a) Berechnen Sie die Länge $L(\alpha)$ des Weges $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

b) Berechnen Sie eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktion $f(x) = x\,\cosh(x)$.

c) Berechnen Sie das Wegintegral der Funktion $g(x, y) = x$ entlang des Weges α.

Hinweis: Es gilt $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Aufgabe 8: (6P – je 3P pro Teilaufgabe)

a) Welche Daten müssen für eine gewöhnliche Differentialgleichung vorgegeben sein? (Tipp: mindestens 3 Daten)

b) Wann heißt y Lösung der Differentialgleichung? (Tipp: 3 Eigenschaften)

Aufgabe 9: (12P – Für die Teilaufgaben: 2P, 10P)

a) Bestimmen Sie die Lösung $z(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$z' = 3z\,, \qquad z(0) = 1\,.$$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$y' = 3y + te^t\,, \qquad y(0) = 2$$

mit dem Ansatz $y(t) = u(t)\,z(t)$, wobei $z(t)$ die Lösung aus Teil a) sei.