Analysis II

Kurzskript — Definitionen und Sätze

TU Dortmund, Sommersemester 2014

Ben Schweizer

Version vom 16.7.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Begriffe

1.1 Norm, Metrik, Topologie

Definition 1.1 (Norm) *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Norm ist eine Abbildung, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

(N1) $\|.\| : V \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in V$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|.\|)$ *heißt* ***normierter Vektorraum****.*

Definition 1.2 (Metrik) *Sei X eine Menge. Eine Metrik ist eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften*

(M1) $d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$.

Das Paar (X, d) *heißt* ***metrischer Raum****.*

Satz 1.3 (Norm liefert Metrik) *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann definiert*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf V.

Definition 1.4 (Kugeln) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ setze*

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

Die Menge $B_r(x) \subset X$ heißt die offene Kugel um x mit Radius r.

Definition 1.5 (Umgebung) *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $U \subset X$ und $x \in X$. Die Menge U heißt* Umgebung *von x, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit*

$$B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Definition 1.6 (offen) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, falls U Umgebung von x ist für alle $x \in U$.*

Satz 1.7 (Rechenregeln für offene Mengen) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

1. *$\emptyset$ und X sind offen*
2. *U, V offen $\to U \cap V$ offen*
3. *U_i offen für alle $i \in I$ (beliebige Indexmenge) $\to \bigcup_{i \in I} U_i$ offen.*

Definition 1.8 (abgeschlossen) *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.*

Definition 1.9 (Rand) *Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$.*

$$x \in \partial A :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A).$$

Satz 1.10 *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist*

1. *$X \setminus \partial A$ offen und ∂A abgeschlossen*
2. *$A \cup \partial A$ abgeschlossen*
3. *$A \setminus \partial A$ offen.*

Definition 1.11 (Inneres/Abschluss) *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt*

- *$\overset{o}{A} := A \setminus \partial A$ das Innere von A*
- *$\overline{A} := A \cup \partial A$ der Abschluss von A.*

Definition 1.12 (Topologie) *Sei X eine Menge mit einer ausgezeichneten Menge von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ (eine Teilmenge der Potenzmenge von X). Die Familie $\mathcal{T}$ heißt* Topologie *auf X, falls*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$*
2. *$U, V \in \mathcal{T} \to U \cap V \in \mathcal{T}$*
3. *$U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I \to \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.*

Eine Menge X mit Topologie $\mathcal{T}$ heißt topologischer Raum*. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen* offene Mengen*. $U \subset X$ heißt* Umgebung *von x, falls es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$.*

1.2 Stetigkeit

Definition 1.13 (Konvergenz einer Folge) *Sei X ein topologischer Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, $x \in X$.*

$$x_k \to x \text{ in } X \;:\Longleftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ existiert ein } K \in \mathbb{N} : x_k \in U \; \forall k \geq K.$$

Satz 1.14 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen) *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.*

1. *A abgeschlossen $\to \forall x_k \to x$, $x_k \in A$ für alle k gilt $x \in A$*
2. *Sei X ein metrischer Raum und für alle Folgen $x_k \to x$ mit $x_k \in A$ für alle k gilt $x \in A$. Dann ist A abgeschlossen.*

Definition 1.15 (Stetigkeit in metrischen Räumen) *Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ und $a \in X$.*

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } a \;&:\Longleftrightarrow \; \text{für alle Folgen } x_k \to a \text{ gilt } f(x_k) \to f(a) \\ &\Longleftrightarrow: \; \lim_{x \to a} f(x) = f(a). \end{aligned}$$

f heißt stetig auf X, wenn f stetig in x ist für alle $x \in X$.

Satz 1.16 (Viele stetige Abbildungen) *Seien X, Y, Z metrische Räume.*

1. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*
2. *Sei $f : X \to \mathbb{R}^n$.*

   $$\text{Dann ist } f = (f_1, ..., f_n) \text{ stetig} \Longleftrightarrow f_k \text{ sind stetig für alle } k.$$

3. *Sind $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ stetig, so ist auch $f \pm g$ stetig.*
   Für $f : X \to \mathbb{R}^n$ und $g : X \to \mathbb{R}$ stetig sind auch $f \cdot g : X \to \mathbb{R}^n$ und $\frac{f}{g} : X \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Satz 1.17 (ε-δ-Kriterium der Stetigkeit) *Seien X, Y metrische Räume, $a \in X$ und $f : X \to Y$.*

$$f \text{ stetig in } a :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \text{ so dass } d_Y(f(x), f(a)) \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in B_\delta(a).$$

Satz 1.18 *Seien X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann gilt*

$$f \text{ ist stetig} \Longleftrightarrow \forall V \subset Y \text{ offen ist } f^{-1}(V) \text{ offen.}$$

Definition 1.19 (Stetigkeit) *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$. Die Abbildung f heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen offen sind.*

Definition 1.20 (Homöomorphismus) *Seien X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv und stetig ist, und f^{-1} stetig ist.*

Satz 1.21 (Lineare stetige Abbildungen) *Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist stetig*

2. *A ist stetig in 0*

3. *es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|A \cdot x\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X\,.$$

Definition 1.22 (Abbildungsnorm) *Seien X, Y Vektorräume. Für eine stetige Abbildung $A : X \to Y$ setzen wir*

$$\|A\| := \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\}\,.$$

1.3 Vollständigkeit und Kompaktheit

Definition 1.23 (Cauchy-Folge) *Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls*

für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_k, x_m) < \varepsilon$ für alle $k, m \geq K$.

Definition 1.24 (Vollständiger Raum) *Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.*

Satz 1.25 *$(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ ist ein vollständiger normierter Raum.*

Definition 1.26 (Banachraum) *Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.*

Definition 1.27 (Überdeckung/Kompaktheit) *Sei X metrischer Raum, $A \subset X$.*

1. *Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ mit einer Indexmenge I heißt* ***Überdeckung*** *von A, falls*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

also für alle $x \in A$ existiert ein $i \in I$, so dass $x \in U_i$.
$(U_i)_{i\in I}$ heißt ***offene Überdeckung****, falls alle U_i offen sind.*

2. *Die Menge A heißt* ***kompakt****, falls zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine* ***endliche*** *Teil-Überdeckung existiert, also $i_1, ..., i_N \in I$ existieren, so dass*

$$A \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_N}\,.$$

Definition 1.28 (Diameter/Beschränktheit) *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Der Durchmesser oder* ***Diameter*** *von A wird definiert als*

$$\mathrm{diam} A := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\} \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

und $\mathrm{diam}\,\emptyset := 0$. *Die Menge A heißt* ***beschränkt****, falls* $\mathrm{diam} A < \infty$.

Satz 1.29 (kompakt $\Rightarrow$ beschränkt und abgeschlossen) *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Dann ist A beschränkt und abgeschlossen.*

Lemma 1.30 ($\mathbb{R}^n$ hat abzählbare Basis der Topologie) *Der Raum $X = \mathbb{R}^n$ hat eine abzählbare Basis der Topologie: es existiert eine Familie $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Mengen, so dass für alle $U \subset X$ offen und alle $x \in U$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_i \subset U$.*

Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt daher auch

A kompakt $\Longleftrightarrow$ jede abzählbare *Vereinigung offener Mengen hat eine endliche Teil-Überdeckung.*

Definition 1.31 (Folgenkompaktheit) *Ein topologischer Raum heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 1.32 (Folgenkompaktheit und Kompaktheit) *Sei X ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $A \subset X$*

$$A \text{ folgenkompakt} \Longleftrightarrow A \text{ kompakt.}$$

Satz 1.33 (Heine-Borel) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$A \text{ kompakt} \Longleftrightarrow A \text{ abgeschlossen und beschränkt.}$$

Bemerkung Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann:

$$A \text{ kompakt} \overset{1.)}{\rightarrow} A \text{ folgenkompakt} \overset{2.)}{\rightarrow} A \text{ vollständig} \overset{3.)}{\rightarrow} A \text{ abgeschlossen.}$$

Beispiele, die zeigen, dass jeweils $\Leftarrow$ nicht gilt:

1.) X ein topologischer Raum ohne abzählbare Basis, z.B. $L^\infty([0,1],\mathbb{R})$

2.) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ oder, wenn A beschränkt sein soll: $A := \overline{B}_1(0) \subset C_b([0,1])$

3.) $\mathbb{Q}$ in $X = \mathbb{Q}$

Satz 1.34 (Bilder kompakter Mengen) *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Satz 1.35 (Stetige Abbildungen auf Kompakta: Maximum) *Sei X eine kompakter topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es existiert ein $x_0 \in X$, so dass*

$$f(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Satz 1.36 (Stetige Abbildungen auf Kompakta: Gleichmäßige Stetigkeit) *Seien X, Y metrische Räume, X kompakt, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, das heißt*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in X : \qquad d_X(x,y) < \delta \;\rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2 Differentiation

2.1 Partielle und totale Ableitung

Definition 2.1 (Ableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in U$ ein Punkt. Die Abbildung f heißt differenzierbar in $x \in U$, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$f(x+\xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi)$$

mit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

In diesem Fall heißt $Df(x) := A$ die (totale) Ableitung von f in x. Die Abbildung f heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist in jedem Punkt $x \in U$.

Bemerkung 2.2 (Kurven) *Im Fall $n = 1$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar genau dann, wenn alle Komponenten f_j, $1 \leq j \leq m$, differenzierbar sind (im Sinne der Analysis I). In diesem Fall gilt*

$$Df(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

in dem Sinne, dass $Df(x) : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto (f_1'(x)\xi, \ldots, f_m'(x)\xi) \in \mathbb{R}^m$.

Definition 2.3 (Partielle Ableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, ..., f_m)$. Sei $x \in U$ ein Punkt und $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ 0 \neq h \in \mathbb{R}}} \frac{f_j(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h},$$

falls dieser Limes existiert. Existiert der Limes für alle $j \leq m$, so nennen wir f partiell differenzierbar (nach x_i).

Notation: Abkürzend schreiben wir die partiellen Ableitungen auch als

$$\partial_i f_j(x) := \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Im Falle $n = 1$, $f : x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$ (f hat nur ein Argument), schreiben wir auch $\partial_x f(x) := \partial_1 f(x)$.

Satz 2.4 (Totale Ableitung → Partielle Ableitungen) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x. Dann ist f stetig in x.*

Die totale Ableitung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei bezüglich der kanonischen Basen dargestellt durch die Matrix $A = Df(x)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Dann existieren alle partiellen Ableitungen von f im Punkt x und es gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = a_{j,i} \,.$$

Die Matrix A nennt man auch ***Funktionalmatrix*** *oder* ***Jacobi-Matrix****.*

Satz 2.5 (Partielle Ableitungen → Totale Ableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in U und alle partiellen Ableitungen seien stetig in $x \in U$. Dann ist f in x differenzierbar mit*

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Corollar 2.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, für die alle partiellen Ableitungen stetig sind (insbesondere existieren sie). Dann ist f stetig.*

Merke:

stetig partiell differenzierbar → differenzierbar → partiell differenzierbar.

2.2 Kurven und Felder

Definition 2.7 (Kurve) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^m$. Der Vektor*

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = Df(t)$$

heißt **Tangentialvektor** *von f in t (falls f in t differenzierbar ist). Die Zahl*

$$\mathcal{L}(f) := \int_I \|f'(t)\|_{\mathbb{R}^m} \, dt$$

heißt **Länge** *von f (falls das Integral existiert).*

Definition 2.8 (Skalarfeld) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein skalares Feld ist eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$. Falls f in x differenzierbar ist, ist der **Gradient** gegeben durch*

$$\nabla f(x) = Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(x).$$

Insbesondere ist

$$f(x + \xi) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot \xi.$$

Kommentar für spätere Vorlesungen: Eigentlich ist $Df(x)$ eine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, also eine Matrix, die nur aus einer Zeile besteht. Hingegen ist der Gradient $\nabla f(x)$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$. Dieser Vektor hat die Eigenschaft, dass das Skalarprodukt mit einer Richtung ξ die Variation von f beschreibt. Es gilt also $\nabla f(x) \cdot \xi = Df(x)\, \xi$.

Definition 2.9 (Vektorfeld/Divergenz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $v = (v_1, ..., v_n) : U \to \mathbb{R}^n$. Falls v differenzierbar ist, so heißt*

$$\operatorname{div} v := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

die Divergenz von v.

Satz 2.10 (Schwarz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$*

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x).$$

Definition 2.11 (Rotation) *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Die Rotation von v ist definiert als*

$$\operatorname{rot} v(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}(x).$$

Definition 2.12 (Laplace-Operator) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Der Laplace-Operator ist definiert durch*

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

2.3 Kettenregel, Mittelwertsatz, Taylor-Formel

Definition 2.13 (Landau-Symbol) *Falls $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ die Eigenschaft $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \to 0$ für $\|\xi\| \to 0$ hat, so schreiben wir auch $\varphi(\xi) = \mathbf{o}(\|\xi\|)$. In Worten: Für $\xi \to 0$ geht φ schneller gegen 0 als $\|\xi\|$.*

Satz 2.14 (Kettenregel) *Sein $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Seien weiter $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $f(U) \subset V$ und $g : V \to \mathbb{R}^k$ Funktionen. Für $x \in U$ sei f in x und g in $f(x)$ differenzierbar. Dann ist die Komposition*

$$g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbar in x und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

Corollar 2.15 (Partielle Ableitungen) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Seien weiter $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $f(U) \subset V$ und $g : V \to \mathbb{R}^k$ Funktionen. Dann gilt*

$$\partial_i (g \circ f)_k(x) = D(g_k \circ f)(x) \cdot e_i = e_k \cdot Dg(f(x)) \cdot Df(x) \cdot e_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Definition 2.16 (Richtungsableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn*

$$D_\xi f(x) := \partial_\xi f(x) := \frac{d}{dt} f(x + \xi t)\Big|_{t=0}$$

existiert, so nennen wir $D_\xi f(x)$ die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung ξ. Ist f darüberhinaus in x differenzierbar, so folgt aus der Kettenregel

$$D_\xi f(x) = Df(x) \cdot \xi = \nabla f(x) \cdot \xi.$$

Satz 2.17 (Mittelwertsatz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien weiter $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$f(x + \xi) = f(x) + \left(\int_0^1 Df(x + t\xi)\, dt \right) \cdot \xi$$

Corollar 2.18 (Differenzierbare Funktionen sind Lipschitz-stetig) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Seien weiter $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Setze*

$$M := \sup_{0 \le t \le 1} \|Df(x + t\xi)\|_{\mathbb{R}^{n \times m}}.$$

Dann gilt

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \le M \cdot \|\xi\|.$$

Lemma 2.19 *Sei $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b v(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|v(t)\|\, dt.$$

Notation: Sei $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein **Multiindex**. Wir setzen

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n| \\ \alpha! &:= \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! = (\alpha_1!) \cdot ... \cdot (\alpha_n!) \end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$D^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} f.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist also $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$.

Satz 2.20 (Höhere Ableitungen) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen k-ten Ableitungen. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot \xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann ist die Funktion*

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) := f(x + t\xi)$$

k-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + t\xi) \cdot \xi^\alpha.$$

Satz 2.21 (Taylor-Formel) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot \xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann existiert ein $\theta \in [0,1]$ so dass*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(x) \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(x + \theta\xi) \cdot \xi^\alpha.$$

Corollar 2.22 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k+1} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(x) \cdot \xi^\alpha + \mathbf{o}(\|\xi\|^{k+1})$$

für $\xi \to 0$.

Definition 2.23 (Hesse-Matrix) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in $x \in U$. Dann ist die Hesse-Matrix von f definiert als*

$$\mathrm{Hess}(f)(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1,...,n}.$$

Corollar 2.24 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt*

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \mathrm{Hess}(f)(x) \cdot \xi \rangle + \mathbf{o}(\|\xi\|^2)$$

für $\xi \to 0$.

Definition 2.25 (Lokales Extremum) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in U$ heißt* lokales Extremum *von f, falls für ein $\delta > 0$*

$$f(y) \le f(x) \;\forall y \in B_\delta(x) \quad (x \textbf{ ist lokales Maximum})$$

oder

$$f(y) \ge f(x) \;\forall y \in B_\delta(x) \quad (x \textbf{ ist lokales Minimum}).$$

Satz 2.26 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei weiter $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $x \in U$ und x ein lokales Extremum von f. Dann gilt*

$$\nabla f(x) = 0.$$

Definition 2.27 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir fassen A hier nicht als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf, sondern als Bilinearform, $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A : (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, A \cdot \eta \rangle$. Die Matrix A heißt*

- ***positiv definit**, falls $\langle \xi, A \cdot \xi \rangle > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt*
- ***positiv semidefinit**, falls $\langle \xi, A \cdot \xi \rangle \ge 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt*
- ***negativ (semi-)definit**, falls $(-A)$ positiv (semi-)definit ist*
- ***indefinit**, falls $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass*

$$\langle \xi, A \cdot \xi \rangle > 0 \text{ und } \langle \eta, A \cdot \eta \rangle < 0.$$

Bemerkung: Eine symmetrische quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv definit falls alle Eigenwerte von A positiv sind. Eine symmetrische quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv semidefinit falls alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.

Satz 2.28 (Hinreichendes Kriterium für Extrema) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\nabla f(x) = 0$ für $x \in U$. Weiterhin sei* $\mathrm{Hess}(f)(x)$ *positiv definit. Dann besitzt f in x ein striktes lokales Minimum: es existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$f(y) > f(x) \quad \forall y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}.$$

3 Implizite Funktionen

3.1 Der Satz über implizite Funktionen

Satz 3.1 (Banach'scher Fixpunktsatz) *Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $T : A \to A$ eine Kontraktion, das heißt es existiert ein $\theta \in (0,1)$ mit*

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta \cdot d(x, y).$$

Dann besitzt T genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $x \in A$ mit

$$T(x) = x.$$

Satz 3.2 (Inverse von Matrizen) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $B \in B_\delta(A)$ auch B invertierbar ist mit*

$$\|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|.$$

Satz 3.3 (Implizite Funktionen) *Sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^m$. Sei weiter $U \subset X \times Y$ und $(x_0, y_0) \in U$. Betrachte für $f : U \to Z$ die Gleichung*

$$f(x, y) = 0. \qquad (*)$$

Es gelte

(i) Triviale Lösung $f(x_0, y_0) = 0$,

(ii) Regularität *$D_y f$ existiert, f und $D_y f$ sind stetig in (x_0, y_0)*

(iii) Invertierbarkeit *$D_y f(x_0, y_0) : Y \to Z$ ist invertierbar.*

Dann kann man $(*)$ lokal nach y auflösen: Es existieren $\delta_x > 0$, $\delta_y > 0$ und eine eindeutige Abbildung

$$u : B_{\delta_x}(x_0) \to Y$$

mit

$$f(x, y) = 0,\ x \in B_{\delta_x}(x_0),\ y \in B_{\delta_y}(y_0) \quad \Longleftrightarrow \quad y = u(x).$$

Die Abbildung u ist stetig. Ist $f \in C^1$, so ist auch $u \in C^1$ und es gilt

$$D_x u(x) = -[D_y f(x, u(x))]^{-1} \cdot D_x f(x, u(x)).$$

3.2 Umkehrfunktionen

Satz 3.4 (Umkehrabbildung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $x_0 \in U$ ein Punkt und $y_0 := f(x_0)$ sein Bildpunkt. Die Linearisierung $Df(x_0)$ sei invertierbar.*

Dann gibt es offene Umgebungen $U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ von y_0, so dass $f : U_0 \to V_0$ bijektiv ist. Die Umkehrabbildung g von f (also die Abbildung g mit $g \circ f = id|_{U_0}$) ist stetig differenzierbar mit $Dg(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$.

Satz 3.5 (Invertieren von Matrizen) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass die Abbildung*

$$\mathrm{inv} : \mathbb{R}^{n\times n} \supset B_\delta(A) \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad B \mapsto B^{-1}$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar ist.

Satz 3.6 (Regularität der Umkehrfunktion) *Es sei $f : U \to V$ eine Funktion zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $Df(x)$ sei invertierbar für alle $x \in U$, f sei bijektiv mit Umkehrfunktion $g : V \to U$. Ist f von der Klasse $f \in C^k$ für $k \geq 1$, so ist auch g von der Klasse $g \in C^k$.*

Definition 3.7 (Homöomorphimus) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \to U$. Falls f und g stetig sind, so heißt f ein **Homöomorphimus**.*

*Sind die Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, f ein Homöomorphimus und f und g beide stetig differenzierbar, so heißt f ein **Diffeomorphismus**.*

3.3 Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.8 (Immersion) *Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$, $(t_1, ..., t_k) \mapsto \varphi(t_1, ..., t_k)$. Die Abbildung φ heißt Immersion, wenn φ stetig differenzierbar ist und der Rang der Funktionalmatrix*

$$D\varphi = \frac{\partial(\varphi_1, ..., \varphi_n)}{\partial(t_1, ..., t_k)} := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq k}}$$

in jedem Punkt maximal ist, also $\mathrm{Rang}(D\varphi(t)) = k$ *für alle $t \in T$.*

Satz 3.9 (Immersionen sind lokal Homöomorphismen) *Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem Punkt $t \in T$ eine offene Umgebung $V \subset T$, so dass die Einschränkung $\varphi|_V : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv ist und ein Homöomorphismus von V auf $\varphi(V)$.*

Definition 3.10 (Untermannigfaltigkeit) *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt in $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und eine Immersion $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi : T \to M \cap U$ ein Homöomorphismus ist.*

Satz 3.11 (Untermannigfaltigkeiten als Lösungsflächen) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $k \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt: M ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für alle $a \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{Rang} Df(x) = n - k \ \forall x \in U$, so dass*

$$M \cap U = \{x \in U | f(x) = 0\}.$$

Definition 3.12 (Tangential- und Normalenvektoren) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $\tau \in \mathbb{R}^n$ heißt* **Tangentialvektor** *an M in a, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert und eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = \tau$. Der* ***Tangentialraum*** *von M in a ist die Menge*

$$T_a(M) := \{\tau \in \mathbb{R}^n \,|\, \tau \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}.$$

Elemente $n \in \mathbb{R}^n$ der Menge

$$N_a(M) := \{n \in \mathbb{R}^n \,|\, n \cdot \tau = 0 \ \forall \tau \in T_a(M)\}$$

heißen ***Normalenvektor.***

Satz 3.13 (Charakterisierung von Tangential- und Normalenraum) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann gilt:*

(i) $T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum. Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : V \to M$ eine Immersion wie in Definition 3.10 mit $\varphi(t) = a$. Dann ist $\{\partial_1 \varphi(t), ..., \partial_k \varphi(t)\}$ eine Basis von $T_a(M)$.

(ii) $N_a(M)$ ist ein $(n-k)$-dimensionaler Vektorraum. Zu a sei $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^{n-k}$, $f = (f_1, ..., f_{n-k})$ eine Nullstellenfunktion wie in Satz 3.11. Dann ist $\{\nabla f_1(a), ..., \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis on $N_a(M)$.

Satz 3.14 (Extrema unter Nebenbedingungen) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. In der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei M gegeben als $M \cap U = \{g = 0\}$ für eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $\operatorname{Rang} Dg(x) = n - k$ für alle $x \in U$.*

Sei $F : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, die in a ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung M besitzt. Genauer: es existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a, so dass $F(a) \geq F(x)$ für alle $x \in M \cap V$ gilt.

Dann gilt

$$\nabla F(a) \in N_a(M)\,.$$

Aufgrund von Satz 3.13 gibt es daher Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(a) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \nabla g_j(a).$$

Die λ_j heißen ***Lagrange-Multiplikatoren****.*

4 Integrale

4.1 Kurvenintegrale

Definition 4.1 (Länge einer Kurve) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve auf $I = (a, b)$. Dann definieren wir die Länge der Kurve als*

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int\limits_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

Lemma 4.2 (Umparametrisierung) *Sei $\Phi : (0, L) \to (a, b)$ stetig diffbar, bijektiv und monoton wachsend. Dann ist durch $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \Phi$ eine Umparametrisierung von γ gegeben. Die Länge bleibt unverändert, es gilt $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\tilde{\gamma})$.*

Definition 4.3 (Integral von f über eine Kurve γ) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein skalares Feld und $\gamma(I) \subset U$. Dann setzen wir*

$$\int_\gamma f := \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

Der Wert von $\int_\gamma f$ ist unabhängig von der Parametrisierung von γ.

4.2 Parameterabhängige Integrale

Satz 4.4 (Stetige Abhängigkeit) *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Menge. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ setze*

$$\psi(y) := \int\limits_a^b f(x, y) \, dx \qquad \forall y \in U.$$

Dann ist $\psi : U \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 4.5 (Differenzierbare Abhängigkeit) *Seien $[a, b]$ und $J \subset \mathbb{R}$ zwei kompakte Intervalle, $f : [a, b] \times J \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ sei stetig und nach y stetig differenzierbar. Wir betrachten*

$$\psi(y) := \int\limits_a^b f(x, y) \, dx \qquad \forall y \in J.$$

Dann ist $\psi : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx.$$

Satz 4.6 (Doppelintegrale) *Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

5.1 Erste Beispiele

Definition 5.1 (Gewöhnliche Differentialgleichung) *Eine (autonome) gewöhnliche Differentialgleichung ist gegeben durch einen Wertebereich $U \subset \mathbb{R}^n$, ein Zeitintervall $[0,T) \subset \mathbb{R}$, eine Anfangsbedingung $y_0 \in U$ und eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$.*

Eine Lösung der Differentialgleichung *ist eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$y : [0,T) \to U \quad \textit{mit} \quad y(0) = y_0, \quad \textit{und} \quad y'(t) = f(y(t)) \,\forall t \in [0,T).$$

Eine (nicht-autonome) gewöhnliche Differentialgleichung ist gegeben durch $U \subset \mathbb{R}^n$, $[0,T) \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in U$ wie oben, und eine rechte Seite *$f : U \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$. Für Lösungen fordern wir $y'(t) = f(y(t),t)$ für alle $t \in [0,T)$.*

Bemerkung: Durch Einführung einer zusätzlichen Zeitvariablen $x(t) = t$ kann man jedes explizit zeitabhängige (also nicht-autonome) System äquivalent als ein autonomes System schreiben: Für $f : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist das System $y'(t) = f(y(t),t)$ äquivalent zum System $(y,x)' = \tilde{f}((y,x)) := (f(y,x),1)$.

Satz 5.2 (Eindimensionale lineare Differentialgleichung) *Zu einer stetigen Funktion $a : [t_0,T] \to \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetig differenzierbare Lösung $y : [t_0,T] \to \mathbb{R}$ von*

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\eta)\, d\eta\right).$$

Satz 5.3 (Variation der Konstanten) *Zu stetigen Funktionen $a,b : [t_0,T] \to \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetig differenzierbare Lösung $y : [t_0,T] \to \mathbb{R}$ von*

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = z(t)\left(y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(\eta)}{z(\eta)}\, d\eta\right)$$

mit

$$z(t) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(\eta)\, d\eta\right).$$

Hierbei ist die (positive) Funktion z die Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} z'(t) &= a(t)z(t) \\ z(t_0) &= 1. \end{aligned}$$

Satz 5.4 (Explizites Lösen von Differentialgleichungen) *Um eine explizite Lösung einer eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichung zu finden, kann man versuchen:*

- *Substituieren*
- *Trennung der Variablen*
- *Intelligentes Raten*
- *Im* BRONSTEIN *nachsehen*

5.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Das Hauptresultat des Kapitels ist der nachfolgende Satz. Der Beweis wird erst nach Satz 5.10 geführt.

Satz 5.5 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $y_0 \in G$, $(t_-, t_+) \subset \mathbb{R}$ und $t_0 \in (t_-, t_+)$, $f : G \times (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in y. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung $y : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to G$ von*

$$\begin{aligned} y' &= f(y, t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Definition 5.6 (Lipschitz-Stetigkeit) *Für $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ sei $g : G \times H \to \mathbb{R}^k$. Wir nennen $g = g(y, z)$ Lipschitz-stetig in y, falls für ein $L > 0$ gilt*

$$\|g(x, z) - g(y, z)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L\, \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall x, y \in G,\ z \in H.$$

Die Funktion g heißt lokal Lipschitz-stetig in y, falls

$$\forall (y, z) \in G \times H\ \exists r > 0 : \quad g|_{B_r(y,z)} \text{ ist Lipschitz-stetig in } y.$$

Satz 5.7 (Viele Lipschitz-stetige Funktionen) *Sei $g : G \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Dann ist g lokal Lipschitz-stetig.*

Satz 5.8 (Eindeutigkeit) *Sei $f : G \times [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig in y und $y_0 \in G \subset \mathbb{R}^n$, $T \in [t_0, \infty) \cup \{+\infty\}$. Die Wege y und z seien Lösungen von*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), t) \qquad \forall t \in (t_0, T) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y & \text{ stetig differenzierbar.} \end{aligned}$$

Dann gilt $y \equiv z$ auf $[t_0, T)$.

Lemma 5.9 (Rückwärts lösen) *Eine Funktion γ ist Lösung des Rückwärts-Problems*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), t) \qquad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y & \text{ stetig differenzierbar auf } [t_0 - \varepsilon, t_0] \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\widetilde{\gamma} : t \longmapsto \gamma(t_0 - t)$ eine Lösung des Vorwärts-Problems ist:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -f(y(t), t_0 - t) \qquad \forall t \in (0, \varepsilon) \\ y(0) &= y_0 \\ y & \text{ stetig differenzierbar auf } [0, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Satz 5.10 (Äquivalente Integralgleichung) *Sei $f : G \times I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subset \mathbb{R}^n$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(y_0, t_0) \in G \times I$. Dann löst $\gamma : I \to G$ das System*

$$\begin{aligned} y' &= f(y, t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y & \text{ stetig differenzierbar} \end{aligned}$$

genau dann, wenn γ das System

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\, ds \qquad \text{auf } I \\ y & \text{ stetig} \end{aligned}$$

löst.

An dieser Stelle wird der Beweis von Satz 5.5 von Picard-Lindelöf geführt. Aufgrund unserer Vorarbeiten muss lediglich die Existenz einer Lösung der Integralgleichung nachgewiesen werden. Dies geschieht mit dem Banach'schen Fixpunktsatz.

Lemma 5.11 (Zusammensetzen von Lösungen) *Sei $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 < t_1 < t_2$. Die Abbildungen $\gamma_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ seien (auf den jeweiligen Intervallen) stetig differenzierbar und Lösungen von*

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad \forall t\,. \tag{$*$}$$

Falls weiterhin die Stetigkeitsbedingung $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ erfüllt ist, so ist die zusammengesetzte Funktion

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \leq t_1 \\ \gamma_2(t) & \text{falls } t > t_1 \end{cases}$$

Lösung von $(*)$ auf $[t_0, t_2]$.

Durch ein Fortsetzungsargument lässt sich zeigen: Für Lipschitz-stetige Funktionen $f : G \times [t_0, T)$ und Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ gilt: Die Lösung zu $y(t_0) = y_0$ existiert entweder für alle Zeiten, oder sie läuft in endlicher Zeit zum Rand von G (bzw. nach ∞). Die Argumentation ist wie im Beweis von Satz 5.15.

Definition 5.12 (Differentialgleichung höherer Ordnung) *Ein System der Ordnung $N \geq 1$ ist gegeben durch eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \times [t_0, T) = \mathbb{R}^{nN} \times [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$, die Gleichung lautet*

$$y^{(N)}(t) \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)^{(N)} = f\left(y(t), y'(t), ..., y^{(N-1)}(t), t\right) .$$

Satz 5.13 *Jedes System N-ter Ordnung läßt sich als System 1-ter Ordnung schreiben: Setze $z(t) = (z_0(t), z_1(t), ..., z_{N-1}(t)) \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$ und fordere $z_k(t) = y^{(k)}(t)$. Dann lautet das System für z*

$$z'(t) = F(z(t), t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}(t) \\ f(z(t), t) \end{pmatrix} .$$

Korollar: Für Lipschitz-stetige f gilt ein lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen N-ter Ordnung. Als Anfangswerte müssen $y(t_0) = y_0$, ... $y^{(N-1)}(t_0) = y_{N-1}$ vorgegeben werden.

5.3 Lineare Differentialgleichungen

Satz 5.14 (Gronwall-Ungleichung) *Sei $y : [0, T) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $y(t) \geq 0$ für alle t und*

$$y'(t) \leq \lambda \cdot y(t) + c$$

auf $[0, T)$ für Konstanten $\lambda, C \geq 0$. Sei weiter $y(0) = y_0$ für $y_0 \geq 0$. Dann gilt

$$y(t) \leq z(t) \qquad \forall t \in [0, T),$$

wobei z die Lösung von

$$z' = \lambda \cdot z + c, \qquad z(0) = y_0$$

ist.

Satz 5.15 (Globaler Existenzsatz für lineare Differentialgleichungen) *Für $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ seien $A : [t_0, T) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert zu beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ auf dem gesamten Intervall $[t_0, T)$ eine Lösung y von*

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y & \quad \textit{stetig differenzierbar.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Satz 5.16 (Homogene lineare Gleichung) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Definiere*

$$L_H := \{\gamma : I \to \mathbb{R}^n \textit{ stetig differenzierbar } : \gamma'(t) = A(t)\gamma(t) \; \forall t \in I\}.$$

Dann ist L_H ein n-dimensionaler Vektorraum. Eine Basis ist $y_1, ..., y_n \in L_H$, wobei

$$y_k'(t) = A(t) y_k(t), \qquad y_k(t_0) = e_k$$

für beliebige $t_0 \in I$.