Aufgabe 1 (10P, Teilaufgabe=5P)

(a) Gegeben seien die beiden Normen $\|x\|_2 := (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$ und $\|x\|_\infty := \max\limits_{k=1,\ldots,n} |x_k|$ für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_\infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\|x-y\| = 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.

Aufgabe 2 (12P, Teilaufgabe=3P)

(a) Begründen Sie, ob es eine Metrik d auf $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass $d(x, y) = 2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.

(b) Berechnen Sie die Funktionalmatrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x) := (x_1, x_2^2, x_3^3, 0)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, so dass $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, aber die Funktion f in $(0, 0)$ kein lokales Extremum besitzt. (mit Beweis)

(d) Sei $X := C^0([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{f \in X : f(0) \geq 0\}$ bzgl. der Supremumsnorm abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (10P, Teilaufgabe=5P)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{\cos x \sin y}{x^2 + y^4}, & \text{falls} \;\; (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls} \;\; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie, ob die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ stetig ist (mit Begründung).

(b) Untersuchen Sie, ob f im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie soweit existent die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$.

Aufgabe 4 (6P)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f(x) := Ax + x\psi(x)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist. Zeigen Sie, dass f im Punkt $x = 0$ total differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $Df(0)$.

- Bitte wenden -

Aufgabe 5 (4P)

Zeigen Sie: Die Gleichung $F(x,y) := \frac{1}{2}y^3 - 3xy + 2 = 0$ ist in einer Umgebung von $x = 1$ eindeutig nach y auflösbar, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion $y = u(x)$ mit $u(1) = 2$, so dass $F(x, u(x)) = 0$ in einer Umgebung von $x = 1$. Berechnen Sie $\frac{\partial u}{\partial x}(1)$.

Aufgabe 6 (8P)

Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis einschliesslich den Gliedern 2.Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto e^{x-y} \cdot \ln x^2$$

um den Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 7 (6P)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := (x^2 + y^2)\, e^{x+y}$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 8 (6P)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + e^{y(t)/t}$$

für $t \geq 1$ und $y(1) = 1$.

Aufgabe 9 (8P)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = 2\sqrt{y(t)}, \quad y(t) \geq 0,$$

für $t \geq 0$ und $y(0) = 0$.