Aufgabe 1 (10P, Teilaufgabe=5P)

(a) Zeigen Sie: Durch

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Zeichnen Sie für $n = 2$ die abgeschlossenen Kugeln $B_r(a)$ mit Mittelpunkt $a = (1,0)$ und Radius $r = 1$ bzgl. der $\|\cdot\|_1$-Norm und der euklidischen Norm.

(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $A := \{x \in X : \|x\| > 1\} \cup \{0\}$. Geben Sie den Rand ∂A sowie den Abschluss $\bar{A}$ an (ohne Beweis). Zeigen Sie, dass $\partial B_1(0) \subset \bar{A}$ und $0 \in \partial A$.

Aufgabe 2 (12P, Teilaufgabe=3P)

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *nicht* stetig, aber partiell differenzierbar ist (mit Beweis).

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, so ist f auch stetig in a.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer *stetigen* Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, deren partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ im Punkt $(x,y) = (0,0)$ existiert, aber deren partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(x,y) = (0,0)$ *nicht* existiert.

(d) Zeigen Sie: Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ Lipschitz-stetige Funktionen, so ist auch die Funktion $h = g \circ f$ Lipschitz-stetig.

Aufgabe 3 (10P, Teilaufgabe=5P)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ stetig ? (mit Beweis)

(b) Untersuchen Sie, ob f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie soweit existent die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$.

- Bitte wenden -

Aufgabe 4 (6P)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f(x) := Ax + x\psi(x)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist. Zeigen Sie, dass f im Punkt $x = 0$ total differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $Df(0)$.

Aufgabe 5 (4P)

Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, für die

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y + 3y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^3 + 2x^2.$$

Aufgabe 6 (8P)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := (y^2 - 1)\sin x.$$

Aufgabe 7 (6P)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(x, y, z) := 2z^7 + 4y^2 - 3xy + z + 2.$$

Zeigen Sie, dass durch $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (2, 1)$ eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x, y)$ mit $\varphi(2, 1) = 0$ implizit definiert ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ im Punkt $(2, 1)$.

Aufgabe 8 (6P)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \left(\frac{1}{t} - 1\right) y(t)$$

für $t \in [1, \infty)$ und $y(1) = 1$.

Aufgabe 9 (8P)

Bestimmen Sie die größtmögliche Fläche eines achsenparallelen Rechtecks, das in der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Platz findet.