

Strömungsmechanik

Blatt 9

Abgabe bis Donnerstag, den 17.06.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Unterraum auch separabel).

Sei Y ein separabler Banachraum und $V \subset Y$. Zeigen Sie, dass dann auch V separabel ist. Hinweis: Verwenden Sie eine Basis $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Y und mit $\varepsilon_j = 1/j$ die Relation

$$Y \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_j}(y_k).$$

Aufgabe 2 (Helmholtz-Zerlegung von $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ glatt berandet und beschränkt, $Y^1 := H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, dazu

$$W^1 := \{w \in Y^1 \mid \nabla \cdot w = 0, \nu \cdot w|_{\partial\Omega} = 0\}$$

und

$$Z^1 := \{g \in Y^1 \mid \exists \psi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : g = \nabla\psi\}.$$

Zeigen Sie, dass W^1 und Z^1 abgeschlossen und orthogonal bezüglich des $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ -Skalarproduktes sind, und dass $Y^1 = W^1 \oplus Z^1$ gilt. Verwenden Sie für den letzten Punkt die Regularität der Lösungen von inhomogenen Neumann-Problemen. Vergleichen Sie mit Theorem 23.17 und Übung 6.10.