

# Strömungsmechanik

## Blatt 9

Abgabe bis Donnerstag, den 17.06.2021, um 12:00

---

### Aufgabe 1 (Unterraum auch separabel).

Sei  $Y$  ein separabler Banachraum und  $V \subset Y$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $V$  separabel ist. Hinweis: Verwenden Sie eine Basis  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $Y$  und mit  $\varepsilon_j = 1/j$  die Relation

$$Y \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_j}(y_k).$$

### Aufgabe 2 (Helmholtz-Zerlegung von $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ).

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  glatt berandet und beschränkt,  $Y^1 := H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , dazu

$$W^1 := \{w \in Y^1 \mid \nabla \cdot w = 0, \nu \cdot w|_{\partial\Omega} = 0\}$$

und

$$Z^1 := \{g \in Y^1 \mid \exists \psi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : g = \nabla\psi\}.$$

Zeigen Sie, dass  $W^1$  und  $Z^1$  abgeschlossen und orthogonal bezüglich des  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ -Skalarproduktes sind, und dass  $Y^1 = W^1 \oplus Z^1$  gilt. Verwenden Sie für den letzten Punkt die Regularität der Lösungen von inhomogenen Neumann-Problemen. Vergleichen Sie mit Theorem 23.17 und Übung 6.10.