technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PROF. DR. B. SCHWEIZER
DR. M. KNIELY

SOMMERSEMESTER 2021
03.06.2021

Strömungsmechanik

Blatt 8

Abgabe bis Donnerstag, den 10.06.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Gebietstransformation und Divergenzfreiheit).
Zu zwei Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ gebe es eine differenzierbare Bijektion $\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ mit $\det D\Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei divergenzfrei. Wir konstruieren dazu das Vektorfeld

$$\tilde{v} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{v}_j(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\det D\Phi(x)} \partial_k \Phi_j(x)\, v_k(x)$$

mit $\tilde{x} = \Phi(x)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\tilde{v}$ divergenzfrei ist.

Hinweis: Verwenden Sie eine Testfunktion $\varphi = \psi \circ \Phi$ und die Rechnung (mit Summationskonvention und für $\det D\Phi(x) > 0$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_k(x)\partial_k\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega v_k(x)\partial_j\psi(\Phi(x))\partial_k\Phi_j(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \tilde{v}_j(\Phi(x))\,\partial_j\psi(\Phi(x))\,\det D\Phi(x)\,dx = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}_j(\tilde{x})\,\partial_j\psi(\tilde{x})\,d\tilde{x}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Theorem 23.17 – Helmholtz-Zerlegung von $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Wir setzen

$$\begin{aligned} W &:= \left\{ w \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \forall f \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) : \int_\Omega w \cdot \nabla f = 0 \right\}, \\ Z &:= \left\{ g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \exists \psi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) : g = \nabla\psi \right\}. \end{aligned}$$

Dann sind W und Z abgeschlossene Unterräume; sie sind orthogonal zueinander bezüglich des $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$-Skalarproduktes. Es gilt

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) = W \oplus Z.$$

Hinweis: Dieses Resultat wird aus der Vorlesung in die Übung ausgelagert. Folgen Sie der Argumentation im Buch und zeigen Sie auch eventuell fehlende Details.