technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Sommersemester 2021
28.05.2021

Strömungsmechanik

Blatt 7

Abgabe bis Donnerstag, den 03.06.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Bemerkungen zur Vorlesung).

Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Ein stetiger linearer Operator $A\colon H_1 \to H_2$ ist kompakt dann und nur dann, wenn der duale Operator $A'\colon H_2 \to H_1$ kompakt ist.

ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u \in L^2(\Omega)$. Für den distributionellen Gradienten gelte $\nabla u = 0$. Zeigen Sie mit einem Glättungsargument, dass u eine lokal konstante Funktion ist.

Aufgabe 2 (Proposition 23.2 in einer vereinfachten Situation).

Das Residuum $F \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ erfülle eine Orthogonalitätsrelation $\int_{\mathbb{R}^3} F \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot \varphi = 0$. Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $p \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ existiert mit $F = \nabla p$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst mit Testfunktionen $\varphi = \operatorname{rot} \Psi$, *dass* $\operatorname{rot} F = 0$ *im Distributionssinn gilt. Schließen Sie mit einem Glättungsargument und der Poincaré-Ungleichung (in* H^1*) auf die Existenz einer lokalen Druckfunktion.*

Aufgabe 3 (Eine Beschreibung der inf-sup-Bedingung durch Korollar 23.9).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit folgender Eigenschaft für eine Konstante $C > 0$: Für jede Funktion $g \in L^2_0(\Omega, \mathbb{R})$ existiert eine Lösung $v \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ von

$$\nabla \cdot v = g, \qquad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, \|g\|_{L^2(\Omega)} \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für jedes Ω mit dieser Eigenschaft die Poincaré-Abschätzung (23.9) in der negativen Sobolev-Norm gilt. Überlegen Sie sich, dass Eigenschaft (1) auf unbeschränkten Gebieten nicht gelten kann.