technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Sommersemester 2021
13.05.2021

Strömungsmechanik

Blatt 5

Abgabe bis Donnerstag, den 20.05.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Die Stokes-Gleichung als Sattelpunktproblem).
Wir betrachten für $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $p \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ den Ausdruck

$$\Psi(v,p) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - p \, \nabla \cdot v - f \cdot v \right) dx. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass das Sattelpunktproblem

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)} \sup_{p \in L^2(\Omega)} \Psi(v,p)$$

äquivalent zur Minimierungsaufgabe des Stokes-Problems

$$\inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N) \\ \nabla \cdot v = 0}} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - f \cdot v \right) dx$$

ist. Zeigen Sie weiters, dass jede Lösung (v,p) von $D\Psi(v,p) = 0$ eine Lösung der Stokes-Gleichungen ist.

Aufgabe 2 (Kern und Bild im Endlichdimensionalen).
Wir betrachten zwei adjungierte lineare Abbildungen im Endlichdimensionalen, $G \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $D = G^T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit einem Dimensionsargument, dass $\ker(D)^\circ = \ker(D)^\perp = R(G)$ gilt.

Aufgabe 3 (Fundamentallösung für die Stokes-Gleichung).
Seien $\chi_j \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ biharmonische Funktionen, also Lösungen von $\Delta^2 \chi_j = 0$. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^N$ durch

$$v_i = \sum_{j=1}^N a_j \left(\partial_i \partial_j \chi_j - \delta_{ij} \Delta \chi_j \right), \qquad p = \sum_{j=1}^N a_j \partial_j \Delta \chi_j \tag{2}$$

eine Lösung der stationären homogenen Stokes-Gleichungen gegeben ist. Zeigen Sie weiters, dass die Fundamentallösung mit derselben Formel gegeben ist, sofern $a_j > 0$ und $\Delta^2 \chi_j = \frac{\delta}{a_j}$ für alle j gilt.