Ergodensätze

Ausarbeitung eines Vortrag im Seminar „Analysis“

Ein unbekannter Autor*

22. Juni 2018

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, ob und gegebenenfalls in welcher Form Zeitmittel konvergieren. Hierzu werden zunächst zwei Versionen des Maximalen Ergoden–Lemmas formuliert sowie zwei Anwendungen dieses Lemmas diskutiert. Sodann wird der Birkhoffsche Ergodensatz bewiesen, welcher im Kontext allgemeiner Maßräume fast-sichere Konvergenz der Zeitmittel sicherstellt. Anschließend betrachten wir kompakte metrisierbare Räume und formulieren in diesem Kontext den semi-uniformen Ergodensatz, aus dem wir den uniformen Ergodensatz folgern. Letzterer garantiert sogar die gleichmßige Konvergenz der Zeitmittel. Hierauf folgt eine weitere Anwendung des Maximalen Ergoden–Lemmas. Abschließend werden zwei hinreichende Kriterien für gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen, darunter ist auch der Ergodensatz für gleichgradig stetige Iterierte.

1 Vorbetrachtungen

Im Vortrag wird der Darstellungssatz von Riesz und die Begriffe des adjungierten Operators und der schwach-$*$-Konvergenz benötigt. Diese sollen nun kurz aufgeführt werden.

Definition 1.1 (Adjungierter Operator)**.** *Seien* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *und* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *Hilberträume und* $U\colon H_1 \to H_2$ *ein linearer und beschränkter Operator. Der zu* U adjungierte Operator $U^*\colon H_2 \to H_1$ *ist durch die Gleichung*

$$\langle Uf, g\rangle_1 = \langle f, U^* g\rangle_2 \quad \textit{für alle } f \in H_1\,, g \in H_2\,. \tag{1.1}$$

2 Der Ergodensatz von v. Neumann

Wir benötigen zunächst das folgende technische Lemma.

*Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, Vogelpothsweg 87, D-44227 Dortmund, Germany

Lemma 2.1. *Es sei U eine Isometrie auf dem Hilbertraum H. Dann gilt für jedes $f \in H$, dass*

$$Uf = f \quad \text{genau dann, wenn} \quad U^* f = f\,.$$

Der nun folgenden Ergodensatz ist eine Verallgemeinerung des von J. von Neumann 1932 gefunden Ergodensatzes und gibt eine Auskunft über die Konvergenz der Zeitmittel in Hilberträumen.

Satz 2.2 (Ergodensatz von v. Neumann)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $U\colon H \to H$ eine Isometrie. Weiterhin sei $I \subset U$ der abgeschlossene Unterraum der U-invarianten Elemente und $\pi\colon H \to I$ sei die Projektion auf I. Dann gilt für jedes $f \in H$ die Gleichung*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} U^n f = \pi(f)\,.$$

Beweis. Definiere die Menge

$$M := \left\{ h \in H \;\middle|\; \text{Es existiert ein } g \in H\,,\ \text{so dass } h = g - Ug \right\}.$$

Wir werden nun zeigen, dass $M \perp I$ und somit $H = I \oplus \overline{M}$. Ein Beweis dieser Gleichheit findet sich in [2, Theorem V.3.4]. Hierbei ist $\overline{M}$ der Abschluss der Menge M. Somit ist es uns möglich jedes Element $f \in H$ in zwei Komponenten $f_1 \in I$ und $f_2 \in \bar{M}$ zu zerlegen, so dass $f = f_1 + f_2$. Anschließend werden wir zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n$$

eingeschränkt auf I die Identität und eingeschränkt auf $\overline{M}$ die Null-Abbildung ist. Da U eine Isometrie ist, ist U insbesondere linear und wir können folgern:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n f = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n f_1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n f_2 \right) = f_1 + 0 = \pi(f)\,.$$

Wir bemerken, dass $\overline{M}^\perp = M^\perp$. Dass I ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums H ist, ist nicht schwer nachzuweisen - wir verzichten deshalb hier auf den genauen Beweis. Nun sei $h \in M^\perp$, dann gilt für jedes $g \in H$

$$0 = \langle h, g - Ug \rangle = \langle h - U^* h, g \rangle\,,$$

so dass $h = U^* h$. Mit Lemma 2.1 folgt daraus $Uh = h$ und damit ist $h \in I$. Ist nun aber $h \in I$, so folgt unter erneuter Anwendung von Lemma 2.1

$$\langle h, g - Ug \rangle = \langle h, g \rangle - \langle U^* h, g \rangle = 0\,.$$

Also ist $h \in M^\perp$ und damit $I = M^\perp = \overline{M}^\perp$. Wir können somit schreiben: $H = I \oplus \overline{M}$.

Offensichtlich gilt für ein beliebiges $f \in I$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $U^n f = f$. Ist nun $f \in M$, so gibt es ein $g \in H$, so dass $f = g - Ug$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f \right\| &= \lim_{N\to\infty}\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(U^n g - U^{n+1} g\right)\right\| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\|g - U^N g\| \\ &\le \lim_{N\to\infty}\frac{2\|g\|}{N} = 0\,.\end{aligned}$$

□

- Hier auch einmal eine itemize-Liste,
- für ein Bild siehe Abbildung 1.

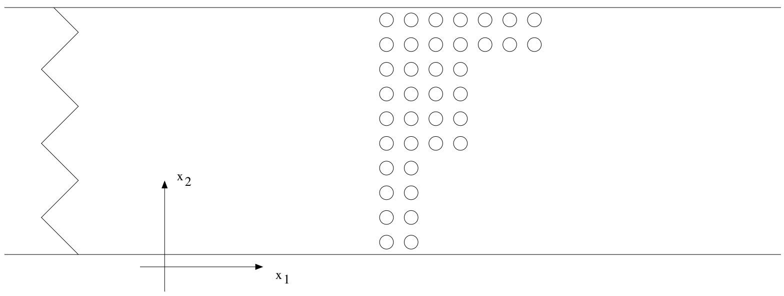

Abbildung 1: The geometry of the transmission problem for $K_\varepsilon = 10$ (number of cells in vertical direction), and vertical wave-number $k_2^\varepsilon = 3/h$ (3 oscillations of the wave in vertical direction).

Literatur

[1] G. D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** (1931) 656–660.

[2] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin 2007