Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
22. Januar 2020

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 14

Abgabe am 29. Januar 2020 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Vergleich von Interpolationen II).
Sei X ein Hilbertraum, $T > 0$ und $\mathbb{N} \ni N \to \infty$ eine Folge. Für jedes N seien Stützpunkte $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ gegeben mit

$$\Delta t := \Delta t^N := \max_{k<N} |t_{k+1} - t_k| \to 0 \qquad \text{für } N \to \infty\,.$$

Funktionswerte in den Stützpunkten seien $f_k^N \in X$ für $k \in \{0, \dots, N\}$ mit $f_0^N = f_0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, dazu sei $f^N : [0,T] \to X$ die stückweise affine und $\bar{f}^N : [0,T] \to X$ die stückweise konstante Interpolation; also, mit $\bar{f}^N(t_k) = f^N(t_k) = f_k^N$ für $k \in \{0, \dots, N\}$ und

$$\bar{f}^N \in V_N := \left\{ \bar{f}^N \in L^2(0,T;X) \,\middle|\, \bar{f}^N \text{ konstant auf allen Intervallen } (t_k, t_{k+1}] \right\},$$
$$f^N \in W_N := \left\{ f^N \in L^2(0,T;X) \,\middle|\, f^N \text{ affin auf allen Intervallen } [t_k, t_{k+1}] \right\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussage: Falls es ein $g \in L^2(0,T;X)$ gibt, so dass

$$\bar{f}^N \to g \qquad \text{stark in } L^2(0,T;X) \text{ für } N \to \infty\,,$$

so gilt auch

$$f^N \to g \qquad \text{stark in } L^2(0,T;X) \text{ für } N \to \infty\,.$$

Aufgabe 2 (Galerkin-Verfahren).
Sei H ein Hilbertraum mit der Eigenschaft, dass es eine Folge $(H_n)_n$ von endlich-dimensionalen Unterräumen gibt, so dass

(i) $H_n \subset H_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ dicht in H ist.

Seien $\ell \colon H \to \mathbb{R}$ linear und stetig und $a \colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $u_n \in H_n$ mit

$$a(u_n, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_n \,.$$

Weiterhin gibt es ein $u \in H$, so dass

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H \,.$$

(b) Es gilt $u_n \to u$ in H für $n \to \infty$.