technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
21. Januar 2020

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 13

Abgabe am 22. Januar 2020 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Absolutstetige Funktionen).
Sei $T > 0$ und $f \in L^1(0, T; \mathbb{R})$. Für $t \in (0, T)$ setzen wir

$$F(t) := \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Zeigen Sie, dass $F \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R})$ und für die Distributionsableitung von F gilt $F' = f$ fast überall in $(0, T)$.
Tipp: Approximieren Sie f geeignet.

Aufgabe 2 (Einfache Gronwall-Ungleichung).
Es sei $T > 0$ und die Funktion $y \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ erfülle die Integralungleichung

$$y(t) \le y_0 + C \int_0^t y(s)\, \mathrm{d}s \qquad \text{für alle } t \in [0, T]$$

und für gegebene reelle Zahlen $y_0, C \ge 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$y(t) \le y_0\, \mathrm{e}^{Ct} \qquad \text{für alle } t \in (0, \infty)\,.$$

Aufgabe 3 (Optimale Poincaré-Konstante).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Die Poincaré-Ungleichung lautet

$$\int_\Omega u^2 \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und für alle } u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass $C = 1/\lambda_1$ die optimale Konstante ist, wobei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert des Dirichlet-Laplaceoperators ist, d.h. die kleinste Zahl $\lambda \ge 0$ für die es ein nicht-triviales $u \in H_0^1(\Omega)$ gibt mit $-\Delta u = \lambda u$ in Ω.
Anleitung: Verwenden Sie die Tatsache (ohne Beweis), dass eine Orthonormalbasis $\{w_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ von $L^2(\Omega)$ existiert mit: $w_k \in H_0^1(\Omega)$ ist eine Eigenfunktion vom Dirichlet-Laplaceoperator und jedes $v \in L^2(\Omega)$ lässt sich schreiben als

$$v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} w_k\,,$$

wobei die Reihe in $L^2(\Omega)$ konvergiert.

Aufgabe 4 (Keine Stetigkeit im Hilbertraum für $p < 2$).
Sei (V, H, V') ein Gelfandtripel. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass es für $p = 2$ eine stetige Einbettung $L^2(0, T; V) \cap W^{1,p}(0, T, V') \hookrightarrow C^0([0, T], H)$ gibt. Zeigen Sie, dass für allgemeine Gelfand-Tripel (V, H, V') und $p < 2$ *keine* derartige Einbettung existiert.
Anleitung: Verwenden Sie ein Gelfand-Tripel, in dem eine Folge $v_k \in V$ existiert mit $\|v_k\|_H^2 = \|v_k\|_V \|v_k\|_{V'} = 1$ und $\|v_k\|_V \to \infty$. Betrachten Sie stückweise affine Funktionen $u_k : [0, T] \to V$ mit $u_k(0) = v_k$ und $u_k(t) = 0 \ \forall t \geq \delta_k$, für eine geeignet gewählte Folge $\delta_k \to 0$.