technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
13. Januar 2020

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 12

Abgabe am 15. Januar 2020 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Ein Randwertproblem).
Sei $\Omega := (0,1)$ und $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a(x) := \sqrt{x}$. Gesucht ist eine Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -\big(a(x)u'(x)\big)' = 1 & \text{für } x \in \Omega\,, \\ u(0) = u(1) = 0\,. \end{cases}$$

Liegt die Koeffizientenfunktion a in $H^1(\Omega)$? Lösen Sie das obige Randwertproblem durch zweifache Integration und entscheiden Sie, ob die Lösung u in den Räumen $C^0(\Omega)$, $C^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ oder $H^2(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 2 (Stetige und kompakte Einbettungen).
a) Es seien X, Y und Z Banachräume mit stetigen Einbettungen $J_1\colon X \hookrightarrow Y$ und $J_2\colon Y \hookrightarrow Z$. Die Einbettung J_1 sei zudem kompakt. Beweisen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\|J_1 x\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X + C(\varepsilon)\|J_2 J_1 x\|_Z\,.$$

b) Für $R > 0$ sei $\Omega := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit Hilfe elementarer Methoden, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt:

$$\|\nabla u\|_{C(\overline{\Omega})} \le \varepsilon \|D^2 u\|_{C(\overline{\Omega})} + C(\varepsilon)\|u\|_{C(\overline{\Omega})}\,.$$

c) Sei $\Omega := (0,1)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le \varepsilon \|u'\|_{C(\overline{\Omega})} + C(\varepsilon)\|u\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Lemma von Stampacchia und Spuren).
a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{spur}(u_+) = (\mathrm{spur})_+ \,.$$

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u_+ \in H_0^1(\Omega)$.
Anleitung: Für a) betrachten Sie zunächst $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Für $\varepsilon > 0$ und

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

gilt $\mathrm{spur}(\theta_\varepsilon(u)) = \theta_\varepsilon(\mathrm{spur}(u))$. *Untersuchen Sie beide Seiten dieser Gleichung auf Konvergenz für $\varepsilon \to 0$ in $L^2(\partial\Omega)$. Allgemeine $u \in H^1(\Omega)$ werden durch glatte Funktionen u_k in der $H^1(\Omega)$-Norm approximiert; zeigen Sie $\|(u_k)_+ - u_+\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$.*
Für b) betrachten Sie eine approximative Folge $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$. Verwenden Sie, dass $\|(u_k)_+ - u_+\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ aus a) (dies gilt auch für Gebiete, die nicht Lipschitz sind). Approximieren Sie $(u_k)_+$ durch geeignete $C_c^\infty(\Omega)$ -Funktionen.