technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
18. Dezember 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 11

Abgabe am 8. Januar 2020 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Starker Lebesgue Konvergenzsatz).
Sei Ω eine nichtleere und messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty)$. Für Funktionenfolgen $(u_k)_k$ und $(f_k)_k$ mit $u_k, f_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ und Grenzfunktionen $u, f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ gelte

(a) $u_k \to u$ punktweise fast überall in Ω und

(b) $|u_k| \leq f_k$ und $f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$.

Zeigen Sie: $u \in L^p(\Omega)$ und $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$.
Anleitung: Überlegen Sie sich zunächst, dass es genügt die Aussage für $p = 1$ zu beweisen. Wenden Sie das Lemma von Fatou auf die Folge $h_k := |u| + f_k - |u_k - u|$ an, um auf die L^1-Konvergenz zu schließen.

Aufgabe 2 (Differenzenquotienten II).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$. Für $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$ und $x \in \tilde{\Omega}$ definieren wir den i-ten Differenzenquotienten der Größe h durch

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ und setzen $D^h u := (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$. Seien nun $p \in (1, \infty)$ und $u \in L^p(\Omega)$. Zeigen Sie: Gibt es eine Konstante $C_0 > 0$, so dass

$$\|D^h u\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq C_0 \quad \text{für alle } 0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)\,,$$

so ist $u \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ mit $\|\nabla u\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq C_0$.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Schwaches Minimumsprinzip).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *schwache Lösung* der Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

falls $u \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \geq 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0\,.$$

Zeigen Sie, dass für solch ein u ein Minimumsprinzip gilt, dass also $u \geq 0$ in Ω.

Aufgabe 4 (Ein bootstrapping Argument).
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Weiterhin sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u \geq 0$ eine Lösung von

$$-\Delta u + u^4 = f \qquad \text{in } \Omega\,.$$

Beweisen Sie, dass $u \in H^2(\Omega)$ und zeigen Sie die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

für eine Konstante $C > 0$.
Anleitung: Verwenden Sie die folgende Aussage: Zu jedem $p \in (1, \infty)$ existiert ein $C_p > 0$, so dass folgendes gilt: Für alle $g \in L^p(\Omega)$ und Lösungen $v \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta v = g \qquad \textit{in } \Omega$$

folgt $v \in W^{2,p}(\Omega)$ und die Abschätzung

$$\|D^2 v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|g\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

gilt.