Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
16. Dezember 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 10

Abgabe am 18. Dezember 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Differenzenquotienten I).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$. Wir definieren für $x \in \tilde{\Omega}$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$ den i-ten Differenzenquotienten der Größe h durch

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

und setzen $D^h u := (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$. Seien nun $p \in [1, \infty)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C = C(\tilde{\Omega}) > 0$ existiert, so dass für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$ gilt:

$$\|D^h u\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} .$$

Aufgabe 2 (Helmholtz-Zerlegung von $H^1_*(\Omega; \mathbb{R}^n)$).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand der Klasse C^2. Mit ν bezeichnen wir den Normalenvektor auf $\partial\Omega$. Wir betrachten Vektorfelder $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit verschwindender Normalenkomponente am Rand,

$$u \in H^1_*(\Omega; \mathbb{R}^n) := \left\{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \;\middle|\; u \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}.$$

Zeigen Sie, dass sich jedes Vektorfeld $u \in H^1_*(\Omega; \mathbb{R}^n)$ zerlegen lässt in einen divergenzfreien Anteil und einen Gradienten. Genauer: Für jedes $u \in H^1_*(\Omega; \mathbb{R}^n)$ existiert ein $w \in H^1_*(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\nabla \cdot w = 0$ in Ω und ein $\psi \in H^2(\Omega)$, so dass

$$u = \nabla\psi + w \quad \text{ in } \Omega .$$

Diese Zerlegung ist eindeutig, es gilt also $H^1_*(\Omega; \mathbb{R}^n) = Z \oplus W$ mit L^2-orthogonalen Unterräumen.
Anleitung: Konstruieren Sie das Potential ψ als schwache Lösung eines Neumann-Problems und verwenden Sie, dass Lösungen eines Neumann-Problems auf Ω in $H^2(\Omega)$ liegen.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Eine Caccioppoli Ungleichung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$ eine kompakt enthaltene Teilmenge. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: für jedes $f \in L^2(\Omega)$ und jede Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

gilt die Abschätzung

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Anleitung: Betrachten Sie eine Abschneidefunktion $\Theta \in C_c^\infty(\Omega)$ *mit Werten in* $[0,1]$ *und* $\Theta \equiv 1$ *in* $\tilde{\Omega}$*. Testen Sie die Gleichung mit der Funktion* $\Theta^2 u$*.*