technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
9. Dezember 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 9

Abgabe am 11. Dezember 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Endlich-dimensionale Approximation).
Auf dem Intervall $\Omega := (0,1)$ sollen Projektionsoperatoren untersucht werden. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, betrachten wir die Stützstellen $x_m := \frac{m}{n}$ für $m \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ und die Intervalle $I_m := (x_m, x_{m+1})$. Dazu seien die Projektionen $f_n\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ auf stückweise konstanten Funktionen definiert durch

$$f_n\colon u \mapsto \bar{u}\,, \quad \bar{u}(x) := \frac{1}{|I_m|}\int_{I_m} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für alle } x \in I_m\,.$$

Zeigen Sie für die Kugeln

$$B_V := \overline{B_R(0)} \subset V := H^1(\Omega) \quad \text{und} \quad B_X := \overline{B_R(0)} \subset X := L^2(\Omega)$$

und mit der Identifikation $j\colon u \mapsto u$ die nachfolgenden Aussagen.

(a) $f_n \to j$ in $C^0(B_V, X)$ für $n \to \infty$. Der Spann $\operatorname{span}(f_n(B_V))$ ist endlich-dimensional, die Menge $f_n(B_V) \subset X$ ist beschränkt.

(b) $f_n \not\to j$ in $C^0(B_X, X)$.

Bemerkung: Aus a) folgt mit Theorem 16.7 aus dem Buch, dass die stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist.

Aufgabe 2 (Skalierung der Poincaré-Konstante).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und nicht-leer. Für $p \in [1,\infty)$ gilt die Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_0(\Omega,p)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass die Konstante $C_0 = C_0(\Omega,p)$ so gewählt werden kann, dass $C_0(\Omega,p) = C_1(p)\operatorname{diam}(\Omega)$.
Anleitung: Überlegen Sie sich zunächst, dass Sie $0 \in \Omega$ annehmen können. Wählen Sie $r > 0$, so dass $\tilde{\Omega} := r\Omega \subset B_1(0)$ und zeigen Sie, dass $C_0(\tilde{\Omega},p) = C_1(p)$. Beachten Sie dabei, dass Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ vermöge $\tilde{x} = rx$ und $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x)$ zu $\tilde{u}\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ transformiert werden.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Harmonische Funktionen im Einheitskreis).
Für $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Lösungen der Laplacegleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Die Randwerte werden in der Winkelvariablen mit Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entwickelt, $g(\theta) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos(k\theta)$. Entwickeln Sie $u(r,\theta) := \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k(r)\cos(k\theta)$ in Polarkoordinaten und zeigen Sie

$$\partial_r^2 b_k + \frac{1}{r}\partial_r b_k - \frac{k^2}{r^2} b_k = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Finden Sie zwei Lösungen in Form von Polynomen und betrachten Sie eine davon (mit Begründung). Geben Sie dann eine Bedingung an $(a_k)_k$ an, welche eine endliche Energie $\int_\Omega |\nabla u|^2$ garantiert. Zeigen Sie, dass es eine Familie $(a_k)_k$ gibt, so dass die Randwerte stetig sind, aber die Energie unbeschränkt

Aufgabe 4 (Natürliche Randbedingungen).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Lipschitzrand, ν der Normalenvektor und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^2(\Omega)$ eine schwache Lösung des Neumann-Problems zu $f \in L^2(\Omega)$, es gelte also

$$\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \qquad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass u die Gleichungen

$$-\Delta u = f \;\text{ in } \Omega \qquad \text{und} \qquad \partial_\nu u = 0 \;\text{ auf } \partial\Omega$$

im Distributionssinn beziehungsweise im Spursinn erfüllt.