Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
27. November 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 8

Abgabe am 4. Dezember 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Poincaré-Konstante mit zweiten Ableitungen).
Zeigen Sie für beschränkte Lipschitz-Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Konstanten $C_0 = C_0(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C_0 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,.$$

Anleitung: Verwenden Sie zwei Poincaré-Abschätzungen.

Aufgabe 2 (Alternativer Beweis für das Lemma von Lax-Milgram).
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ und $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Für Konstanten $C_0, C_1 > 0$ gelte die Stetigkeitsbedingung

$$|a(u,v)| \le C_1 \|u\|_H \|v\|_H$$

sowie die Koerzivitätsbedingung

$$a(u,u) \ge C_0 \|u\|_H^2$$

für alle $u, v \in H$. Gegeben sei weiterhin ein lineares und stetiges Funktional $\ell\colon H \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $u \in H$, so dass

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \text{für alle } v \in H\,.$$

Weiterhin gilt die Abschätzung

$$\|u\|_H \le \frac{1}{C_0} \|\ell\|\,.$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass es einen linearen stetigen Operator $T\colon H \to H$ sowie ein Element $\ell_0 \in H$ gibt, so dass $a(u,v) = \langle Tu, v\rangle$ und $\ell(v) = \langle \ell_0, v\rangle$ für alle $v \in H$. Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $F_\alpha\colon H \to H$, $F_\alpha(u) := u - \alpha(Tu - \ell_0)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass man α so wählen kann, dass F_α einen Fixpunkt besitzt. Folgern Sie hieraus die Behauptung.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Bi-Laplaceoperator).
Gegeben sei ein C^2-berandetes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* des Problems

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega\,, & \text{(1a)} \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,, & \text{(1b)} \\ \partial_\nu u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,, & \text{(1c)} \end{cases}$$

falls für alle Testfunktionen $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ die Identität

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

gilt. Beweisen Sie, dass es zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$ von (1) gibt.
Anleitung: Beschreiben Sie das Problem mit einer geeigneten Bilinearform. Um die Koerzivität der Bilinearform zu zeigen, verwenden Sie folgende Regularitätsabschätzung: Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $-\Delta v = f_0 \in L^2(\Omega)$ gilt die Abschätzung $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f_0\|_{L^2(\Omega)}$.

Aufgabe 4 (Zum Musterbeispiel).
Wir betrachten auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge $(u_k)_k$ von Lösungen $u_k \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\nabla \cdot \Big(a_k(u_k)\nabla u_k\Big) = f \quad \text{in } \Omega\,,$$

wobei $a_k \to a$ in $C^0(\mathbb{R})$ gilt und $0 < \lambda \leq a \leq \Lambda < \infty$. Zeigen Sie: Es gibt eine Teilfolge $(u_{k_l})_l$ mit $u_{k_l} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ und $u_{k_l} \to u$ in $L^2(\Omega)$. Die Grenzfunktion $u \in H_0^1(\Omega)$ löst im schwachen Sinn

$$-\nabla \cdot \Big(a(u)\nabla u\Big) = f \quad \text{in } \Omega\,.$$