technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
20. November 2019

# Partielle Differentialgleichungen I

## Blatt 7

Abgabe am 27. November 2019 in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1 (Kompaktheit des Spuroperators).**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Zeigen Sie, dass der Spuroperator $\operatorname{spur}\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ kompakt ist, d.h. jede beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ besitzt eine stark konvergente Teilfolge in $L^2(\partial\Omega)$.

**Aufgabe 2 (Variante der Poincaré-Abschätzung).**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und zusammenhängend mit Lipschitz-Rand. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le C \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 + \left( \fint_\Omega u \right)^2 \right) .$$

**Aufgabe 3 (Das Neumann-Problem).**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge mit Lipschitzrand und äußerem Normalenvektor $\nu$. Für $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ heißt $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine *schwache Lösung* des Neumann-Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega\,, \\ \nu \cdot \nabla u = g & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1a) \\ (1b) \end{matrix}$$

falls $u \in H^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi + \int_{\partial\Omega} g\varphi \tag{2}$$

für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$.

(i) Wir setzen

$$H(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \fint_\Omega u = 0 \right\} .$$

Folgern Sie aus dem Riesz'schen Darstellungssatz, dass es eine eindeutige Funktion $u \in H(\Omega)$ gibt, so dass die Gleichung (2) für alle $\varphi \in H(\Omega)$ gilt.

*Tipp: Verwenden Sie hierfür Aufgabe 2.*

(ii) Zeigen Sie, dass es genau dann eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ des Neumann-Problems gibt, wenn

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0\,.$$

Ist das Neumann-Problem eindeutig lösbar?

**Aufgabe 4 (Reflexivität von $W^{1,p}$).**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in (1, +\infty)$. Zeigen Sie, dass der Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ reflexiv ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Beweisen Sie, dass das Produkt $X \times Y$ zweier reflexiver Banachräume $X$ und $Y$ wieder ein reflexiver Banachraum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Banachraums wieder reflexiv ist.

(iii) Wählen Sie geeignete Normen, so dass es sich bei der Abbildung

$$T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n\,, u \mapsto (u, \nabla u)$$

um eine Isometrie handelt. Folgern Sie nun die Reflexivität von $W^{1,p}(\Omega)$.