technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
13. November 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 6

Abgabe am 20. November 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Lemma ohne Namen).
Sei X ein normierter Vektorraum und $u \in X$. Eine Folge $(x_k)_k$ in X habe die Eigenschaft, dass zu jeder Teilfolge eine weitere Teilfolge existiert, die schwach gegen x konvergiert. Dann gilt $x_k \rightharpoonup x$ für die gesamte Folge.
Gilt Entsprechendes auch mit fast überall Konvergen (ersetze an beiden Stellen die schwache Konvergenz durch die fast überall Konvergenz)?

Aufgabe 2 (Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen).
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie: Ist $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit Periode $\kappa > 0$, d.h. $g(x + \kappa) = g(x)$ für fast alle x, und

$$\frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa g(x)dx = \lambda,$$

so konvergieren die Funktionen $f_n(x) := g(nx)$ für $n \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ gegen den Mittelwert λ.

Aufgabe 3 (Schwache Konvergenz in $H^1(\Omega)$).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Weiterhin sei $(u_k)_k$ eine Folge in $H^1(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

1. $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $H^1(\Omega)$.
2. $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $L^2(\Omega)$ und $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ schwach in $L^2(\Omega)$.

Aufgabe 4 (Poincaré mit einem Punktwert).
Geben Sie eine Folge $u_k : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetiger Funktionen an mit $u_k(0) = 0$, so dass $\|\nabla u_k\|_{L^2(B_1)}$ beschränkt ist, aber $\|u_k\|_{L^2(B_1(0))} \to \infty$ gilt. Verwenden Sie Ideen aus Aufgabe 1 von Blatt 3.