technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
6. November 2019

# Partielle Differentialgleichungen I

## Blatt 5

Abgabe am 13. November 2019 in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1 (Lösungsbegriffe).**
Zeigen Sie für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und die Gleichung $\Delta u = f$ in $\Omega$ die Implikationen: $u$ klassische Lösung $\Rightarrow$ $u$ starke Lösung $\Rightarrow$ $u$ schwache Lösung $\Rightarrow$ $u$ distributionelle Lösung.

**Aufgabe 2 (Konvergenz in $L^p$ und $L^q$).**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $p \in (1, +\infty)$ und $(u_k)_k$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, d.h. es existiert ein $C > 0$, so dass $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie für $1 \leq q \leq p < \infty$ folgende Äquivalenz:

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{schwach in } L^p(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u_k \rightharpoonup u \quad \text{schwach in } L^q(\Omega)\,.$$

*Hinweis: Verwenden Sie die schwache Kompaktheit von Kugeln in $L^p(\Omega)$, das Lemma ohne Namen und die Tatsache, dass $\int_\Omega u\varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Identität $u \equiv 0$ impliziert.*

(b) Zeigen Sie für $1 \leq s < q < p < \infty$ folgende Äquivalenz:

$$u_k \to u \quad \text{stark in } L^s(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u_k \to u \quad \text{stark in } L^q(\Omega)\,.$$

*Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $u = 0$ ohne Einschränkung angenommen werden kann. Beweisen und verwenden Sie folgende elementare Abschätzung: Es existiert $\theta = \theta(s, q, p) \in (0, 1)$, so dass*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^s(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta}\,.$$

(c) Gilt *b)* auch für $q = p$? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für $p = 2$ und $s = 1$ mit Hilfe der Folge $u_k(x) = k$ für $x \in (0, \delta_k)$ und $u(x) = 0$ sonst.

(Bitte wenden)

**Aufgabe 3.**
Sei $X$ ein Banachraum mit Dualraum $X'$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Starke Konvergenz impliziert schwach-$*$-Konvergenz.

(b) Der schwach-$*$-Limes ist eindeutig in $X'$.

(c) Schwach-$*$-konvergente Folgen sind beschränkt in $X'$.

(d) Die Norm ist schwach-$*$-unterhalbstetig, d.h.

$$x_k \overset{*}{\rightharpoonup} a \quad \text{impliziert } \|a\|_{X'} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_{X'} \,.$$

**Aufgabe 4 (Eine Charakterisierung der starken Konvergenz).**
Sei $X$ ein separabler Banachraum, $X'$ sein Dualraum und $x_k \rightharpoonup x$ eine schwach konvergente Folge in $X$. Zusätzlich sei erfüllt:

$$\text{Für jede schwach-}*\text{-konvergente Folge } \lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \text{ in } X' \text{ gilt } \lambda_k(x_k) \to \lambda(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass dann starke Konvergenz $x_k \to x$ in $X$ vorliegt.