technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
5. November 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 4

Abgabe am 6. November 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Distributionelle harmonische Funktionen II).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ distributionell harmonisch, es gelte also $\Delta u = 0$ im Distributionssinn. Zeigen Sie die Regularität $u \in C^2(\Omega)$ und die klassische Gleichung $\Delta u = 0$ in Ω.
Anleitung: Verwenden Sie eine reguläre Diracfolge ψ_ε und zeigen Sie: 1) $u_\varepsilon := u * \psi_\varepsilon$ ist C^2 und harmonisch. 2) Schließen Sie für eine feste Glättungsfunktion $G = \psi_{\varepsilon_0}$, dass $u_0 := u * \psi_{\varepsilon_0}$ harmonisch ist und dass $u_\varepsilon(x) = (u_\varepsilon * G)(x) = (u_0 * \psi_\varepsilon)(x)$ unabhängig von ε ist. 3) Schließen Sie aus der distributionellen Konvergenz $u_\varepsilon \to u$ die Behauptungen.

Aufgabe 2 (Vergleich von $C^0(\partial\Omega)$ und $H^{1/2}(\partial\Omega)$).
Sei $\Omega := (0, 2\pi) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten $(x, y) \in \Omega$ und mit dem unteren Rand $\Sigma := (0, 2\pi) \times \{0\}$. Wir betrachten Randwerte $g\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ in der Form einer Fourier-Reihe und eine Fortsetzung $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ der Randwerte, die formal eine harmonische Funktion beschreibt,

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \sin(kx)\,, \qquad u(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \sin(kx) e^{-ky}\,.$$

Geben Sie ein Kriterium an die Koeffizienten $(a_k)_k$ an, welches sicherstellt, dass $u \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist (in diesem Fall gilt $g \in H^{1/2}(\Sigma)$). Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_k)_k$ gibt, so dass g stetig ist, aber nicht von der Klasse $H^{1/2}(\Sigma)$.

Aufgabe 3 (Funktionenfolgen und Teilfolgen).
Sei $\Omega = (0, 1)$. Geben Sie jeweils eine Funktionenfolge mit der entsprechenden Eigenschaft an.

a) $(u_k)_k$ erfüllt $\|u_k\|_{L^1(\Omega)} \to 0$, aber es gilt nicht $u_k \to 0$ punktweise fast überall.

b) $(u_k)_k$ ist beschränkt in $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$ mit $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, aber es gilt $\|u_k\|_{L^\infty} \nrightarrow 0$.

c) $a \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $u_k \to u = 0$ in $L^1(\Omega)$, aber $a(u_k) = a \circ u_k \nrightarrow a(u)$ in $L^1(\Omega)$.

d) $(u_k)_k$ in $H^1(\Omega)$ beschränkt, aber $(u_k)_k$ konvergiert nicht stark in $L^2(\Omega)$.

(Bitte wenden)

Aufgabe 4 (Lemma ohne Namen).
Sei X ein metrischer Raum, eine Folge $(x_k)_k$ und ein Punkt $x \in X$ seien gegeben. Es gelte folgende Eigenschaft: Zu jeder Teilfolge $(x_{k_l})_l$ existiert eine weitere Teilfolge $(x_{k_{l_i}})_i$, so dass $x_{k_{l_i}} \to x$ für $i \to \infty$. Dann gilt die Konvergenz der ganzen Folge:

$$x_k \to x \quad \text{für } k \to \infty\,.$$