technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
22. Oktober 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 2

Abgabe am 23. Oktober 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Young und Hölder).
Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Zeigen Sie die Young'sche Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

für reelle Zahlen $a, b \geq 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie die Hölder'sche Ungleichung

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

für Funktionen $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$.

Aufgabe 2 ($W^{1,p}$-Funktionen ohne stetigen Repräsentanten).
Es sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskugel. Finden Sie $p > 1$ und $u \colon B_1(0) \to \mathbb{R}$ mit $u \in W^{1,p}(B_1(0))$, aber u hat keinen stetigen Repräsentanten.

Aufgabe 3 (Zur Einbettung $H^1 \hookrightarrow C^{1/2}$ in einer Dimension).
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Auf dem Intervall $I := (a, b)$ sei u eine Funktion der Klasse $H^1(I)$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x, y \in I$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\partial_x u\|_{L^2(I)}|x - y|^{1/2}\,.$$

Zeigen Sie, dass man einen stetige Repräsentanten für u finden kann.
Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung zunächst für klassisch differenzierbare Funktionen und folgern Sie die Aussage anschließend mit Hilfe eines Dichtheitsarguments.

Aufgabe 4 (Die Spur in den Normen $L^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Zeigen Sie für den Spuroperator auf dem Rand die folgende Abschätzung: Es existiert ein $C > 0$, so dass

$$\|\mathrm{spur}\, u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{1}$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$.
Eine laxe Interpretation: Die rechte Seite kann mit $\|u\|_{H^{1/2}(\Omega)}$ verglichen werden, denn es wird zwischen $L^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$ interpoliert. Insofern deutet Ungleichung (1) an, dass bei der Anwendung des Spuroperators eine halbe Regularitätsstufe verlorengeht.