technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ben Schweizer
Maik Urban

Wintersemester 2019/2020
9. Oktober 2019

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 1

Abgabe am 16. Oktober 2019 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Lipschitz-Gebiete).
Stellen Sie fest, welche der folgenden Mengen Lipschitz-Gebiete sind.

(a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| < 1\right\}$;

(b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\right\}$;

(c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in (-1,1) \text{ und } -2 < y < x\sin(1/x)\right\}$;

(d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in (-1,1) \text{ und } -2 < y < x^2\sin(1/x)\right\}$;

(e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |(x,y)| \in (1,2)\right\} \setminus \left\{(x,0) \,\middle|\, x > 0\right\}$.

Aufgabe 2 (Einfache Pole).
Sei $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist durch $\langle f_\alpha \rangle$ eine Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, +\infty]$ sind die Distributionen $\langle f_\alpha \rangle$ und $\partial_j \langle f_\alpha \rangle$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ durch L^p_{loc}-Funktionen darstellbar?

Aufgabe 3 (Äquivalenz der $W^{1,p}$-Normen).
Sei $p \in (1, +\infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Zeigen Sie die Äquivalenz der $W^{1,p}(\Omega)$-Normen

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\|\partial_i u\right\|_{L^p} \quad \text{und} \quad |||u|||_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\|\partial_i u\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}.$$

Aufgabe 4 (Sobolev-Räume und Konvergenz).
Sei $I \subset \mathbb{R}$ und offenes und nichtleeres Intervall. Es sei $(u_k)_k$ eine Folge in $W^{1,p}(I)$ mit $u_k \to u$ in $L^p(I)$ und $\partial_1 u_k \to f$ in $\mathcal{D}'(I)$ für $k \to \infty$ mit $f \notin L^p(I)$. Zeigen Sie, dass $u \notin W^{1,p}(I)$.