technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PROF. DR. M. RÖGER, PROF. DR. B. SCHWEIZER
MAIK URBAN

SOMMERSEMESTER 2020
08.05.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 3

Abgabe am Freitag, den 15.05.2020, per email

Aufgabe 1 (Projektionssatz).
Sei H Hilbertraum und $K \subset H$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Zeigen Sie mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung: Zu jedem $w \in H$ existiert genau ein $u \in H$ mit

$$\|u - w\| \;=\; \operatorname{dist}(w, K) \;=\; \inf_{v \in K} \|v - w\|.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass der Minimierer $P_K w := u$ durch die Eigenschaft

$$\langle w - P_K w, v - P_K w \rangle_H \;\leq\; 0 \qquad \text{für alle } v \in K$$

charakterisiert ist.
Beweisen Sie schließlich, dass die Abbildung $P_K : H \to K$ stetig ist.

Aufgabe 2 (Beispiele zur direkten Methode).
Diskutieren Sie die folgenden Minimierungsprobleme und die Anwendbarkeit der direkten Methode.

$$\min_{u \in M} \int_0^1 \left(|u'|^2 - \lambda u^2 \right) dx, \; M := \{u \in H^1((0,1)) : u(0) = 0, u(1) = 1\} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

$$\min_{u \in M} \int_0^1 \sqrt{u^2 + |u'|^2}\, dx, \quad M := \{u \in W^{1,1}((0,1)) : u(0) = 0, u(1) = 1\}. \tag{2}$$

(Machen Sie in (1) ein geeignete Fallunterscheidung für λ.)

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Minimierung unter Nebenbedingungen).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und

$$\begin{aligned} M \ &:= \ \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \ : \ |u| = 1 \text{ fast überall in } \Omega\}, \\ I(w) \ &:= \ \int_\Omega |Du|^2 \, dx \ = \ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |\partial_i u_j(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Sei $u \in M$ kritischer Punkt[1] von I auf M. Zeigen Sie: Dann ist u schwache Lösung von

$$-\Delta u \ = \ u|Du|^2,$$

wobei Δ die komponentenweise Anwendung des Laplace-Operators bezeichnet, $(\Delta u)_i = \Delta u_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

[1]Das heißt: für alle stetigen Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = u$ verschwindet $\frac{d}{dt}|_{t=0} I(\gamma(t))$, falls diese Ableitung existiert.