Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2020
30.04.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 2

Abgabe am Freitag, den 08.05.2020, per email

Aufgabe 1 (Koerzivität im $\mathbb{R}^n$).
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert eine kompakte Menge $K_t \subset \mathbb{R}^n$ mit $\{f \leq t\} \subset K_t$.

(b) $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Minimierern).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit Lipschitz-Rand, $g \in H^1(U)$, $M := \{w \in H^1(U) : w = g \text{ auf } \partial U\}$. Sei weiter für $w \in H^1(U)$

$$I_\varepsilon(w) = \int_U \sqrt{|\nabla w|^4 + \varepsilon^2 w^2}\, d\mathcal{L}^n \quad \text{für } \varepsilon > 0, \qquad I(w) = \int_U |\nabla w|^2\, d\mathcal{L}^n.$$

Beweisen Sie: Falls für alle $\varepsilon > 0$ jeweils ein Minimierer u_ε von I_ε auf M gegeben ist, so gilt $u_\varepsilon \to u$ in $H^1(U)$ und u ist Minimierer von I auf M.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Lavrentiev-Phänomen).
Es seien

$$X := \{u \in W^{1,\infty}(0,1) \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\} \text{ und}$$
$$Y := \{u \in W^{1,1}(0,1) \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\}.$$

Weiter sei $F : Y \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) := \int_0^1 f(x, u(x), u'(x))\, dx,\ u \in Y \text{ und}$$
$$f(x, z, p) := (z^3 - x)^2 |p|^6,\ x, z, p \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$\inf_{u \in Y} F(u) = \min_{u \in Y} F(u) = 0.$$

(ii) Zu $u \in X$ existiert $a \in (0,1)$ mit

$$u(x) \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \quad \forall x \in [0, a] \quad \text{und} \quad u(a) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}.$$

(iii) Für dieses a ist

$$f(x, u(x), p) \geq \frac{7^2}{8^2} x^2 |p|^6 \quad \forall x \in [0, a], p \in \mathbb{R}.$$

(iv) Es gilt

$$\inf_{u \in X} F(u) > 0.$$

Hinweis zu (iv): Verwenden Sie (iii) und eine geeignete Hölderungleichung.