

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 1

Abgabe am Freitag, den 01.05.2020, per email

Aufgabe 1 (Ein nichtlineares Randwertproblem).

Sei $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass für zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$ gilt: $0 < a \leq \beta'(z) \leq b$. Auf dem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei eine rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie, dass man eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Variationsproblems finden kann.

Aufgabe 2 (Direkte Methode und Sobolev-Einbettung).

Es sei $X := H_0^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt ist. Weiterhin sei $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

gegeben. Gegeben sei folgendes Minimierungsproblem:

Finde $u \in X$, so dass

$$A(u) = \inf_{\substack{v \in X \\ \Phi(v)=1}} A(v)$$

unter der Nebenbedingung

$$\Phi(u) := \int_{\Omega} |u|^6 \stackrel{!}{=} 1.$$

Dieses Minimierungsproblem ist nicht mit der Direkten Methode lösbar.

- Bestimmen Sie alle Voraussetzungen der Direkten Methode, die in obigem Minimierungsproblem erfüllt sind.
- Zeigen Sie: Es gibt eine Folge (u_k) in X mit $\|u_k\|_{L^6} = 1$, so dass $u_k \rightharpoonup u$ in X , aber $\|u\|_{L^6} \neq 1$.

Tipp: $|u_k|^6$ muss eine Dirac-Distribution approximieren.