Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2020
29.06.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 10

Abgabe am Montag, den 06.07.2020, per email

Aufgabe 1 (Springender Diffusionskoeffizient).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $d : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x,z) = \begin{cases} d^+(x,z) & \text{für } z \geq 0 \\ d^-(x,z) & \text{für } z < 0, \end{cases}$$

wobei $d^+, d^- : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $d(\cdot, z) \in C^1(\overline{\Omega})$ und $d(x, \cdot)$ messbar. Weiterhin sei $e, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig im zweiten Argument und messbar im ersten Argument. Es gelten folgende Wachstumsbedingungen:

1) $|d^\pm(x,z)| \leq C$ für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}$.
2) $d^\pm(x,z) \geq c_0 > 0$ für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}$.
3) Für alle $\delta > 0$ existiert ein $C_\delta > 0$, so dass
$$|e(x,z)| + |f(x,z)| \leq \delta |z| + C_\delta \qquad \text{für alle } (x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Dann existiert eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$-\nabla \cdot \Big[d(\cdot, u) \nabla u - e(\cdot, u) \Big] - f(\cdot, u) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2}$$

Anleitung: Approximieren Sie d mit einer stetigen Funtkion d_ε, die affin linear auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ist. Schreiben Sie die Lösung zum d_ε-Problem u_ε als $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^0 + u_\varepsilon^-$ mit dem positiven Anteil $u_\varepsilon^+ := (u - \varepsilon)_+$ und dem negativen Anteil $u_\varepsilon^- := (u + \varepsilon)_- = -(-u-\varepsilon)_+$. Nach Gebietszerlegung unter Verwendung des Lemmas von Stampacchia bleibt folgender Grenzwert nachzuweisen.

$$\int_\Omega d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle = \int_\Omega d^+(\cdot, u_\varepsilon^+ + \varepsilon) \langle \nabla u_\varepsilon^+, \nabla \varphi \rangle + \int_\Omega d^-(\cdot, u_\varepsilon^- - \varepsilon) \langle \nabla u_\varepsilon^-, \nabla \varphi \rangle$$
$$+ \int_\Omega d_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon^0) \langle \nabla u_\varepsilon^0, \nabla \varphi \rangle \to \int_\Omega d(\cdot, u) \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \,.$$

Dabei kann in den ersten beiden Integralen der Zerlegung die Stetigkeit von $d^\pm$ ausgenutzt werden. Das dritte Integral verschwindet im Limes $\varepsilon \to 0$. Man verwendet dazu, dass nur das Gebiet mit $|u_\varepsilon^0| \leq \varepsilon$ betrachtet werden muss, und dass dort gilt: $d(x, u_\varepsilon^0) = \frac{1}{2}(d^+(x,\varepsilon) + d^-(x, -\varepsilon)) + \frac{1}{2}(d^+(x,\varepsilon) - d^-(x,-\varepsilon))\varepsilon^{-1} u_\varepsilon^0$. Daher kann, bis auf kleine Fehlerterme, $d(\cdot, u_\varepsilon^0) \nabla u_\varepsilon^0$ als Gradient einer Funktion geschrieben werden, die gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 2 (Penalty-Methode).
Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die monotone Funktion $\beta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\beta_\varepsilon(z) := \begin{cases} 0 & \text{falls } z \geq 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} z & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zu $f \in L^2(\Omega)$ sei $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung von

$$-\Delta u_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = f \quad \text{in } \Omega\,. \tag{3}$$

Beweisen Sie eine Abschätzung für u_ε und schließen Sie, dass für eine Teilfolge und ein u die Konvergenz $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$ gilt. Zeigen Sie, dass u die eindeutige Lösung eines Hindernisproblems ist: Es gilt $u \geq 0$ in Ω und

$$\int_\Omega \Big\langle \nabla u, \nabla(w-u) \Big\rangle \geq \int_\Omega \langle f, w-u \rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } w \geq 0\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Stampacchia, um die Nichtnegativität der Grenzfunktion u zu zeigen. Testen Sie (3) *mit den Funktionen* $(w - u_\varepsilon)$ *für den Nachweis der Ungleichung.*