technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2020
22.06.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 9

Abgabe am Montag, den 29.06.2020, per email

Aufgabe 1 (Existenzaussage für ein gemischtes Randwertproblem).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, wobei Γ_D, Γ_N messbar und disjunkt seien. Wir setzen $X := H^1(\Omega)$ und definieren

$$H_{\Gamma_D}(\Omega) := \overline{\left\{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \varphi = 0 \text{ in einer offenen Umgebung von } \Gamma_D\right\}}^{\|\cdot\|_{H^1}}.$$

Weiterhin seien $f \in (H^1_{\Gamma_D}(\Omega))'$, $g \in X$ und $h \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} h = 0$ in Ω gegeben. Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega\,, & (1a)\\ u = g & \text{auf } \Gamma_D\,, & (1b)\\ \partial_\nu u = h\cdot\nu & \text{auf } \Gamma_N & (1c)\end{cases}$$

eine schwache Lösung $u \in X$ besitzt. Hierfür sollen Sie das Randwertproblem als Variationsungleichung mit der Abbildung $F : X \to X'$, $u \mapsto F(u)$ und

$$F(u) : X \to \mathbb{R},\ \langle F(u), \varphi\rangle_{X',X} := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle,$$

formulieren.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$K := \left\{u \in X \;\middle|\; u - g \in H_{\Gamma_D}(\Omega)\right\}.$$

konvex und abgeschlossen ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Abbildungen $N\colon X \to \mathbb{R}$, $\langle N, \varphi\rangle := \int_\Omega h\cdot\nabla\varphi$ und $b\colon X \to \mathbb{R}$, $\langle b, \varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi$ linear und stetig sind.

(c) Prüfen Sie, ob die Abbildung F monoton, stetig, endlichdimensional stetig oder gestört monoton ist. Erfüllt F die Bedingung (M^*)? Zeigen Sie, dass F für $\Gamma_D = \emptyset$ nicht koerziv ist.

Hinweis: Falls $\Gamma_D \neq \emptyset$ ein positives $(n-1)$-dimensionales Hausdorff-Maß hat, so ist F koerziv.

(Bitte wenden)

(d) Sei Γ_D eine Menge mit positivem $(n-1)$-dimensionalem Hausdorff-Maß. Zeigen Sie, dass es eine Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung

$$\langle F(u) - b - N, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in K \tag{2}$$

gibt. Beweise Sie, dass u eine distributionelle Lösung von Gleichung (1a) ist. In welchem Sinne gelten Gleichungen (1b) und (1c)?

(e) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass Ω ein Lipschitzgebiet ist. Überlegen Sie sich, dass die Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung (2) die Identität

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi + \int_{\Gamma_N} (h \cdot \nu) \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (Existenzaussage für eine quasi-lineare Gleichung).

In dieser Aufgabe sollen Sie einen Spezialfall von Theorem 18.1 mit Hilfe der Theorie gestört monotoner Operatoren beweisen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$. Weiterhin sei $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine beschränkte Funktion mit $a(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das quasi-lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \Big(a(u) \nabla u\Big) = f & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

eine schwache Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$ besitzt.