technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2020
15.06.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 8

Abgabe am Montag, den 22.06.2020, per email

Aufgabe 1 (Die Fenchel-Konjugierte).
Sei X ein Banachraum, X' der Dualraum, $F\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Abbildung. Die *Fenchel-Konjugierte zu F* ist definiert durch

$$F^*\colon X' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,, \quad F^*(u^*) := \sup\Big\{\langle u^*, u\rangle - F(u) \;\Big|\; u \in X\Big\}\,.$$

Bestimmen Sie die Fenchel-Konjugierte für die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := c \cdot x - b$ für $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ und $g(x) := |x|$. Überprüfen Sie für beide Funktionen folgende Relationen:

(a) Für $F\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $u \in X$, $u^* \in X'$ gilt

$$u^* \in \partial F(u) \quad \Leftrightarrow \quad F(u) + F^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle\,. \tag{1}$$

(b) Für das Subdifferential der Konjugierten gilt die Relation

$$u^* \in \partial F(u) \quad \Rightarrow \quad u \in \partial F^*(u^*)\,. \tag{2}$$

Aufgabe 2 (Operatoren mit der Bedingung (M)).
Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \to X'$ ein Operator. Wir sagen, dass *F die Bedingung (M) erfüllt*, falls folgendes gilt:

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, \quad Fu_k \rightharpoonup b \text{ in } X', \quad \limsup_{k\to\infty} \langle Fu_k, u_k\rangle_X \le \langle b, u\rangle_X$$
$$\text{impliziert} \quad Fu = b.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $F : X \to X'$ monoton und endlichdimensional stetig, so ist Bedingung (M) erfüllt.

b) Wenn F die Bedingung (M) erfüllt und $B : (X, \text{schwach}) \to (X', \text{stark})$ stetig ist, dann erfüllt auch $F + B$ die Bedingung (M).

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Ein Existenzsatz, ähnlich zu Theorem 17.15).
Beweisen Sie einen Existenzsatz wie in Theorem 17.15 für monotone Operatoren F: Sei X ein reflexiver Banachraum und die Teilmenge $\emptyset \neq K \subset X$ sei beschränkt, abgeschlossen und konvex. Die Abbildung $F\colon K \to X'$ sei monoton und endlich-dimensional stetig. Dann existiert für jedes $b \in X'$ eine Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung

$$\langle Fu - b, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in K\,.$$

Zeigen Sie dazu:

a) Für $v \in K$ setzen wir

$$S(v) \coloneqq \{u \in K \mid \langle Fv, v - u \rangle \geq 0\}\,.$$

Das Variationsproblem ist gelöst, falls

$$S \coloneqq \bigcap_{v \in K} S(v) \neq \emptyset.$$

b) Aufgrund der "endliche Durchschnitte Eigenschaft" (siehe Aufgabe 3 auf Blatt 7) genügt es zu zeigen, dass für endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in K$

$$S(v_1) \cap ... \cap S(v_k) \neq \emptyset$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie hierbei den Satz von Eberlein-Šmulian.

c) Lösen Sie die endlichdimensionalen Probleme mit dem Existenzsatz für endlichdimensionale Variationsungleichungen.