technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2020
08.06.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 7

Abgabe am Montag, den 15.06.2020, per email

Aufgabe 1 (Fixpunkte und monotone Operatoren).
Sei X ein Hilbertraum und $K \subset X$ eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge. Die Abbildung $f\colon K \to K$ sei Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L \geq 0$. Sei $T\colon K \to K$, $T := \mathrm{id}_X - f$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $L \leq 1$, so ist T ein monotoner Operator.

(b) Ist $L < 1$, so ist T ein streng monotoner Operator und f besitzt einen Fixpunkt.

Aufgabe 2 (Mittlere Krümmung und Monotonie-Trick).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^\infty(\Omega)$. Auf $X := W_0^{1,1}(\Omega)$ betrachten wir den Operator

$$Fu = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung $F\colon X \to X'$ ist wohldefiniert, monoton und endlichdimensional stetig.

(b) Für eine Famile $(E_k)_k$ endlichdimensionaler Unterräume $E_k \subset X$ sei die Vereinigung $\bigcup_k E_k$ dicht in X. Wir verwenden die Einschränkungen $F_k u = (Fu)|_{E_k}$ und $f_k = f|_{E_k}$. Die Elemente $u_k \in E_k$ seien Lösungen von $F_k u_k = f_k$. Wir nehmen an, dass $\|u_k\|_{L^1} \leq c_1$. Zeigen Sie eine a priori Abschätzung der Form
$$\|u_k\|_X \leq c_2 = c_2(f, c_1)\,.$$

(c) Zu Lösungen u_k wie in b) sei u ein schwacher Grenzwert, $u_k \rightharpoonup u$ in X. Zeigen Sie, dass dann u die Gleichung $Fu = f$ löst.

Hinweis: Verwenden Sie in (c) den Satz von Banach-Alaoglu.

Aufgabe 3 (Endliche Durchschnitte Eigenschaft).
Zeigen Sie, dass eine kompakte Menge K die folgende Eigenschaft besitzt. Falls für eine Familie abgeschlossener Teilmengen $S_i \subset K$, $i \in I$, alle endlichen Durchschnitte der S_i nichtleer sind, dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} S_i$ nichtleer.