technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban
Sommersemester 2020
01.06.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 6

Abgabe am Montag, den 08.06.2020, per email

Aufgabe 1 (Ein Fixpunktsatz).

Sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ stetig und kompakt. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gelte: Jedes $u \in X$, welches für ein $\lambda \in [0,1]$ die Relation $\lambda T u = u$ erfüllt, erfüllt auch die Abschätzung $\|u\|_X \le M$. Zeigen Sie, dass T einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 2 (Beispiele monotoner Operatoren).

(a) Ist $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und konvex, so ist $\nabla f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein monotoner Operator.

(b) Sei X ein Banachraum und X' sein Dualraum. Für eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ ist das *Subdifferential* ∂f am Punkt $u_0 \in X$ definiert als

$$\partial f(u_0) := \left\{ u' \in X' \;\middle|\; f(v) \ge f(u_0) + \langle u', v - u_0 \rangle \text{ für alle } v \in X \right\}.$$

Ist f konvex, so ist $\partial f(u_0) \neq \emptyset$ für alle $u_0 \in X$. Zeigen Sie, dass das Subdifferential $\partial f \colon X \to \mathcal{P}(X')$ einer konvexen Funktion f ein monotoner Operator ist.

(c) Es sei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine messbare Abbildung, für die eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $|a(\xi)| \le C(1 + |\xi|)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge. Beweisen Sie: Ist a ein monotoner Operator, so auch $F : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $F(u) := -\nabla \cdot a(\nabla u)$.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit für mehrwertige monotone Operatoren).

Sei X ein reflexiver Banachraum, X' sein Dualraum und $\emptyset \neq K \subset X$. Weiterhin sei $F \colon K \multimap X'$ ein mehrwertiger strikt monotoner Operator und $b \in X'$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gibt höchstens eine Lösung $u \in K$ der Relation $b \in F(u)$.

(b) Es gibt höchstens eine Lösung $u \in K$ der Relation

$$\langle \varphi - b, v - u \rangle \ge 0 \qquad \text{für alle } v \in K \text{ und } \varphi \in F(u).$$