technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. M. Röger, Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban
Sommersemester 2020
18.05.2020

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 5

Abgabe am Montag, den 01.06.2020, per email

Aufgabe 1 (Eine einfache Variante der Fredholm-Alternative).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda \in \mathbb{C}$ betragsmäßig kleiner als der kleinste Eigenwert von $-\Delta$, also $|\lambda| < \lambda_0 := \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)}(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}/\|u\|^2_{L^2(\Omega)})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ die Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = f \quad \text{in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.
Anleitung: Verwenden Sie den Lösungsoperator $(-\Delta)^{-1}$ *der Poisson-Gleichung. Zeigen und verwenden Sie die Abschätzung* $\|(-\Delta)^{-1}\|_{L(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq 1/\lambda_0$.

Aufgabe 2 (Brouwer'scher Fixpunktsatz und Variationsungleichungen).

In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Brouwer'schen Fixpunktsatzes 16.2 der Existenzsatz 16.5 bewiesen, also die Lösbarkeit von Variationsungleichungen auf abgeschlossenen konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass auch umgekehrt mit Hilfe von Satz 16.5 der Brouwer'sche Fixpunktsatz bewiesen werden kann.

Aufgabe 3 (Eine nichtlineare elliptische Gleichung).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, die die Wachstumsbedingung $|g(\xi)| \leq C\,(|\xi|^\alpha + 1)$, $\alpha \in [0, 1)$, für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$-\Delta u + g(\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie den Schauder'schen Fixpunktsatz und die $H^2(\Omega)$*-Regularität von Lösungen.*

(Bitte wenden)

Aufgabe 4 (Semilineare Gleichung mit Banach'schem Fixpunktsatz).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

a) Für F beschränkt ist die Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto F \circ u$$

stetig. Für F Lipschitz-stetig ist $\mathcal{F}$ ebenfalls Lipschitz-stetig.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes: Falls F Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstanten μ, $\mu < \mu_0(\Omega)$ hinreichend klein, so gibt es eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta u = F(u).$$

c) Es gibt eine Lipschitz-stetige Funktion $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, so dass die Gleichung

$$-\Delta u(x) = F(u(x), x)$$

nicht lösbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie in b) die Stetigkeit des Operators $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.
Verwenden Sie in c) Eigenfunktionen.