technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
05.07.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 12

Abgabe am Dienstag, den 12.07.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eindeutigkeit im nichtlinearen Ganzraumproblem).
Seien $u_1, u_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^n \times [0,T]) \cap C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ klassische Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(u(x,t)) \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)\,, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad\quad\;\; \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ die Eindeutigkeitsaussage $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ gilt.

Anleitung: Stellen Sie die Gleichung für $w := u_1 - u_2$ auf und schreiben Sie w mit Hilfe der Darstellungsformel als Integral. Verwenden Sie hierbei Theorem 9.8. Wenden Sie das Gronwallsche Lemma [1, Übung 11.2] mit $y(t) := \|w(t,\cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$ an.

Aufgabe 2 (Der Klang einer Trommel).
Die Auslenkung der Membran über $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei beschrieben durch

$$u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto u(x,t)$$

Bei einem Dämpfungsfaktor $b > 0$ lautet die gedämpfte Wellengleichung für u

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = -2b\,\partial_t u \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty)\,,$$

mit der Dirichlet-Bedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,\infty)$ und den Anfangsbedingungen $u(0,\cdot) = u_0$ und $\partial_t u(0,\cdot) = u_1$ auf Ω. Geben Sie formal die allgemeine Lösung mit Hilfe der Eigenfunktionen von $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ an. Welche Mischung aus Frequenzen hört man nach langer Zeit?

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Eindimensionale Finite Elemente).
Zeigen Sie für beschränkte Gebiete $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, eine äquidistante Triangulierung mit

$$T_m \coloneqq \left(\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}\right) \qquad \text{für alle } m \in \{1, \dots, M\}$$

und

$$V_M \coloneqq \left\{ u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \;\middle|\; u(a) = u(b) = 0 \text{ und } u|_{T_m} \text{ affin linear für alle } m \right\}$$

folgende Aussage:

Satz.
Sei $V_M \subset V \coloneqq H_0^1(\Omega)$ und für $H \coloneqq L^2(\Omega)$ sei P_M die H-orthogonale Projektion auf V_M.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, die unabhängig von u und K ist, gibt, so dass

$$\|u'\|_H \leq CM\|u\|_H \qquad \text{für alle } u \in V_M\,.$$

b) Folgern Sie aus a), dass

$$\|P_M u\|_V \leq C\|u\|_V \qquad \text{für alle } u \in V\,.$$

Hinweis für b): Betrachten Sie die Ritz-Projektion $R_M : V \to V$ mit $R_M(V) = V_M$. Verwenden Sie folgende L^2-Abschätzung:

$$\|v - R_M v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c_1}{M}\|v - R_M v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Literatur

[1] B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Heidelberg (2013)