technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
28.06.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 11

Abgabe am Dienstag, den 05.07.2016, in der Vorlesung

Definition (Subdifferential).
Sei X ein Banachraum. Für $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex und $u \in X$ setzen wir

$$\partial F(u) := \{u^* \in X' \mid F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u\rangle \, \forall v \in X\}\,.$$

Dies definiert

$$\partial F : X \to \mathcal{P}(X')\,,$$

also eine mehrwertige Abbildung $\partial F : X \rightharpoonup X'$.

Aufgabe 1.

a) Berechnen Sie das Subdifferential ∂F der Betragsfunktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) := \|x\|$.

b) Sei X ein Banachraum und $F : X \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass das Subdifferential $\partial F : X \rightharpoonup X'$ monoton ist. (Siehe auch [1, Definition 17.5])

Aufgabe 2 (Barenblatt-Lösung).
Es seien $m > 1$ und $T > 0$. Weiterhin sei $u : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,t) := t^{-\lambda}\left(C - k\frac{|x|^2}{t^{2\mu}}\right)_+^{1/(m-1)}.$$

Dabei bedeutet $(f)_+$ den Positivanteil von f, also $(f)_+(x) := \max\{0, f(x)\}$.Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(s) = s^m$. Bestimmen Sie Parameter λ, μ und k, so dass u eine klassische Lösung der Gleichung

$$\partial_t u - \Delta[\Phi(u)] = 0$$

im Positivitätsbereich von u ist. Für welchen Wert der Konstante C ist das Integral der Lösung gleich 1?

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Springender Diffusionskoeffizient).
Zeigen Sie eine Aussage wie im Existenzsatz für das Grundwasserproblem für einen stetigen, einwertigen Koeffizienten $e(x,\cdot)$, allerdings mit einem springenden Koeffizienten $d(x,\cdot)$ (stetig differenzierbar in x): Es gibt $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega d(u)\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle - \int_\Omega \langle e(u), \nabla\varphi\rangle - \int_\Omega f(u)\varphi = 0$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Verwenden Sie die Strukturannahme $d(x,z) = d^+(x,z)$ für $z \geq 0$ und $d(x,z) = d^-(x,z)$ für $z < 0$ und approximieren Sie d mit einer stetigen Funktion d_ε, die affin linear ist auf $[-\varepsilon,\varepsilon]$.

Anleitung: Schreiben Sie die Lösung zum d_ε-Problem u_ε als $u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^0 + u_\varepsilon^-$ mit dem positiven Anteil $u_\varepsilon^+ := (u-\varepsilon)_+$ und dem negativen Anteil $u_\varepsilon^- := (u+\varepsilon)_- = -(-u-\varepsilon)_+$. Nach Gebietszerlegung unter Verwendung des Lemmas von Stampacchia bleibt folgender Grenzwert nachzuweisen.

$$\begin{aligned}\int_\Omega d_\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon)\langle\nabla u_\varepsilon,\nabla\varphi\rangle &= \int_\Omega d^+(\cdot,u_\varepsilon^+ + \varepsilon)\langle\nabla u_\varepsilon^+,\nabla\varphi\rangle + \int_\Omega d^-(\cdot,u_\varepsilon^- - \varepsilon)\langle\nabla u_\varepsilon^-,\nabla\varphi\rangle \\ &\quad + \int_\Omega d_\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon^0)\langle\nabla u_\varepsilon^0,\nabla\varphi\rangle \to \int_\Omega d(\cdot,u)\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Dabei kann in den ersten beiden Integralen der Zerlegung die Stetigkeit von $d^\pm$ ausgenutzt werden. Das dritte Integral verschwindet im Limes $\varepsilon \to 0$. Man verwendet dazu, dass nur das Gebiet mit $|u_\varepsilon^0| \leq \varepsilon$ betrachtet werden muss, und dass dort gilt: $d(x,u_\varepsilon^0) = \frac{1}{2}(d^+(x,\varepsilon) + d^-(x,-\varepsilon)) + \frac{1}{2}(d^+(x,\varepsilon) - d^-(x,-\varepsilon))\varepsilon^{-1}u_\varepsilon^0$. Daher kann, bis auf kleine Fehlerterme, $d(\cdot,u_\varepsilon^0)\nabla u_\varepsilon^0$ als Gradient einer Funktion geschrieben werden, die gegen 0 konvergiert.

Literatur

[1] B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Heidelberg (2013)