technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
21.06.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 10

Abgabe am Dienstag, den 28.06.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Existenzaussage für ein gemischtes Randwertproblem).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, wobei Γ_D, Γ_N messbar und disjunkt seien. Wir setzen $X := H^1(\Omega)$. Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = g & \text{auf } \Gamma_D\,, \\ \partial_n u = \psi & \text{auf } \Gamma_N \end{cases}$$

eine schwache Lösung $u \in X$ besitzt. Hierfür sollen Sie das Randwertproblem als Variationsungleichung mit der Abbildung $F : X \to X'$, $u \mapsto F(u)$ und

$$F(u) : X \to \mathbb{R},\ \langle F(u), \varphi\rangle_{X',X} := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle,$$

formulieren.

a) Betrachten Sie die Menge

$$K := \{u \in X \mid u = g \text{ auf } \Gamma_D\}\,.$$

Zeigen Sie, dass K konvex und abgeschlossen ist? Verwenden Sie hierbei, dass es für jede messbare Teilmenge $\Gamma \subset \partial\Omega$ einen stetigen und linearen Spuroperator $\mathrm{spur} : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ gibt. Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion g ist K nichtleer?

b) Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\varphi) := \int_{\Gamma_N} \psi\varphi$. Welche Voraussetzungen an ψ stellen sicher, dass $f \in X'$ wohldefiniert ist?

c) Prüfen Sie, ob die Abbildung F monoton, stetig, endlichdimensional stetig oder gestört monoton ist. Erfüllt F die Bedingung (M*)? Zeigen Sie, dass F für $\Gamma_D = \emptyset$ nicht koerziv ist. *Hinweis: Falls $\Gamma_D \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge des Randes $\partial\Omega$ ist, so ist F koerziv.*

d) Wir wählen g, so dass K nichtleer ist; die Funktion ψ, so dass $f \in X'$ wohldefiniert ist und die Menge Γ_D, so dass F koerziv ist. Zeigen Sie, dass es eine Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung

$$\langle F(u) - f, v - u\rangle \geq 0 \qquad \text{für alle } v \in K$$

gibt. Beweise Sie, dass u eine schwache Lösung des obigen Randwertproblems ist.

(Bitte wenden)

Aufgabe 2 (Existenzaussage für eine nichtlineare Gleichung).
Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die monotone Funktion $\beta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\beta_\varepsilon(z) := \begin{cases} 0 & \text{falls } z \geq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} z & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Theorie der monotonen Operatoren, dass das Problem

$$-\Delta u_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = f \quad \text{ in } \Omega$$

eine schwache Lösung $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 3 (Penalty-Methode).
Für $\varepsilon > 0$ sei $\beta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 2 definiert. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zu $f \in L^2(\Omega)$ sei $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung von

$$-\Delta u_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = f \quad \text{ in } \Omega\,. \tag{1}$$

Beweisen Sie eine Abschätzung für u_ε und schließen Sie, dass für eine Teilfolge und ein u die Konvergenz $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$ gilt. Zeigen Sie, dass u die eindeutige Lösung eines Hindernisproblems ist: Es gilt $u \geq 0$ in Ω und

$$\int_\Omega \Big\langle \nabla u, \nabla(w - u) \Big\rangle \geq \int_\Omega \langle f, w - u \rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } w \geq 0\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Stampacchia, um die Nichtnegativität der Grenzfunktion u zu zeigen. Testen Sie (1) *mit den Funktionen* $(w - u_\varepsilon)$ *für den Nachweis der Ungleichung.*