technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
14.06.2016

# Partielle Differentialgleichungen II

## Blatt 9

Abgabe am Dienstag, den 21.06.2016, in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1 (Operatoren mit der Bedingung (M)).**
Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \to X'$ ein Operator. Wir sagen, dass $F$ *die Bedingung (M) erfüllt*, falls folgendes gilt:

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, \quad Fu_k \rightharpoonup \bar{b} \text{ in } X', \quad \limsup_{k\to\infty} \langle Fu_k, u_k\rangle_X \le \langle \bar{b}, u\rangle_X$$
$$\text{impliziert} \quad Fu = \bar{b}.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $F : X \to X'$ monoton und endlichdimensional stetig, so ist Bedingung $(M)$ erfüllt.

b) Wenn $F$ die Bedingung $(M)$ erfüllt und $B : (X, \text{schwach}) \to (X', \text{stark})$ stetig ist, dann erfüllt auch $F + B$ die Bedingung $(M)$.

**Aufgabe 2 (Existenzsatz für monotone Operatoren in Variationsungleichungen).**
Der Banachraum $X$ sei separabel und reflexiv, die Teilmenge $\emptyset \neq K \subset X$ sei abgeschlossen und konvex. Die Abbildung $F : K \to X'$ sei monoton und endlichdimensional stetig. Zusätzlich sei entweder $K$ beschränkt oder $F$ koerziv. Dann existiert für jedes $b \in X'$ eine Lösung $u \in K$ der Variationsungleichung

$$\langle Fu - b, v - u\rangle \ge 0 \quad \forall v \in K\,.$$

(Bitte wenden)

**Aufgabe 3 (Ein eleganter Beweis für die Existenz von Lösungen von Variationsungleichungen).**

Beweisen Sie den Existenzsatz für monotone Operatoren in Variationsungleichungen für eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe Menge $K \subset X$, $K \neq \emptyset$. Zeigen Sie dazu:

a) Das Variationsproblem ist gelöst, falls

$$S(v) \coloneqq \{u \in K \mid \langle Fv, v - u \rangle \geq 0\}, \qquad S \coloneqq \bigcap_{v \in K} S(v) \neq \emptyset.$$

gezeigt werden kann.

b) Aufgrund der "endliche Durchschnitte Eigenschaft" (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 7) genügt es zu zeigen, dass für endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in K$

$$S(v_1) \cap ... \cap S(v_k) \neq \emptyset.$$

gilt. Verwenden Sie hierbei den Satz von Eberlein-Smulian: Schwach folgenkompakte Mengen sind schwach kompakt.

c) Lösen Sie die endlichdimensionalen Probleme mit dem Existenzsatz für endlichdimensionale Variationsungleichungen.