technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
07.06.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 8

Abgabe am Dienstag, den 14.06.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$. Weiterhin seien $f : \mathbb{R}^n \to I$ konvex und $g : I \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ebenfalls konvex ist.

b) Sei $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a(\xi) := {}^1\!/\!_p |\xi|^p$ konvex ist.

Aufgabe 2 (Minty-Lemma für Variationsungleichungen).
Sei X ein Banachraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und $F : K \to X'$ monoton und endlichdimensional stetig. Seien $u \in K$ und $b \in X'$. Dann sind folgende Relationen äquivalent:

i) $\langle Fu - b, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$

ii) $\langle Fv - b, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$.

Aufgabe 3 (Grenzübergang in Variationsungleichungen).
Sei X ein Banachraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und $F : K \to X'$ monoton und endlichdimensional stetig. Dann gilt folgende Stetigkeitsaussage:

$$K \ni u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, \quad Fu_k \overset{*}{\rightharpoonup} b \text{ in } X', \quad \limsup_k \langle Fu_k, u_k \rangle \leq \langle b, u \rangle$$

impliziert

$$\lim_k \langle Fu_k, u_k \rangle = \langle b, u \rangle \quad \text{und} \quad \langle Fu - b, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K\,. \tag{M^*}$$

(Bitte wenden)

Aufgabe 4 (Mittlere Krümmung und Monotonie-Trick).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^\infty(\Omega)$. Auf $X := W_0^{1,1}(\Omega)$ betrachten wir den Operator

$$Au = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) A ist als Abbildung $A : X \to X'$ wohldefiniert, monoton und endlichdimensional stetig.

b) Sei $E_k \subset X$ ein endlichdimensionaler Unterraum, die Vereinigung $\bigcup_k E_k$ sei dicht in X, wir verwenden die Einschränkungen $A_k = A|_{E_k}$ und $f_k = f|_{E_k}$. Die Elemente $u_k \in E_k$ seien Lösungen von $A_k u_k = f_k$. Wir nehmen an, dass $\|u_k\|_{L^1} \leq C$. Zeigen Sie eine a priori Abschätzung der Form

$$\|u_k\|_X \leq C = C(f)\,.$$

c) Zu Lösungen u_k wie in b) sei u ein schwacher Grenzwert, $u_k \rightharpoonup u$ in X. Zeigen Sie, dass dann u die Gleichung $Au = f$ löst.