Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
31.05.2016

# Partielle Differentialgleichungen II

## Blatt 7

Abgabe am Dienstag, den 07.06.2016, in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1.**

a) Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und konvex, so ist der Gradient $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein monotoner Operator.
*Hinweis: Verwenden Sie die Stützebeneneigenschaft konvexer Funktionen (Aufgabe 1b auf Blatt 1).*

b) Es sei $K \subset \mathbb{R}$ konvex und abgeschlossen sowie $b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei strikt monoton.

   i) Diskutieren Sie die Bedeutung von $F(u) = b$ sowie die Eindeutigkeit der Lösung $u$.

   ii) Diskutieren Sie für $K := [0, 1]$ die Bedeutung der Variationsungleichung
   $$\langle F(u) - b, v - u \rangle \geq 0 \qquad \text{für alle } v \in K \tag{1}$$
   und weisen Sie nach, dass Lösungen $u$ von (1) eindeutig sind. Bestimmen Sie mittels einer Fallunterscheidung welche Gleichung bzw. Ungleichung die Lösung $u$ erfüllt.

**Aufgabe 2 (Endliche Durchschnitte Eigenschaft).**

Zeigen Sie, dass eine kompakte Menge $K$ die folgende Eigenschaft besitzt. Falls für eine Familie abgeschlossener Teilmengen $S_i \subset K$, $i \in I$, alle endlichen Durchschnitte der $S_i$ nichtleer sind, dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} S_i$ nichtleer.

(Bitte wenden)

**Aufgabe 3 (Ergänzungen zur Vorlesung).**

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C_H = C_H(\Omega) \geq 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in C^\alpha(\Omega)$ gilt:

$$\|u \cdot v\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq C_H \|u\|_{C^\alpha(\Omega)} \|v\|_{C^\alpha(\Omega)}.$$

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $X := L^2(\Omega)$ und $T > 0$. Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ global lipschitzstetig und $u \in C^0(0,T;X)$, so ist auch $f(u) \in C^0(0,T;X)$.

c) Führen Sie eine Rechnung durch, die folgende Aussage suggeriert. Ist $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein monotoner Operator, so ist die Abbildung $F : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ mit $F(u) := -\nabla \cdot a(\nabla u)$ ebenfalls monoton.