technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
24.05.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 6

Abgabe am Dienstag, den 31.05.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eine nichtlineare elliptische Gleichung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, die die Wachstumsbedingung $|g(\xi)| \leq C\,(|\xi|^\alpha + 1)$, $\alpha \in [0, 1)$, für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$-\Delta u + g(\nabla u) = 0 \quad \text{ in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ besitzt. Verwenden Sie den Schauder'schen Fixpunktsatz und die $H^2(\Omega)$-Regularität von Lösungen.

Aufgabe 2 (Semilineare Gleichung mit Banach'schem Fixpunktsatz).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

a) Für F beschränkt ist die Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto F \circ u$$

stetig. Für F Lipschitz-stetig ist $\mathcal{F}$ ebenfalls Lipschitz-stetig.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes: Falls F Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstanten μ, $\mu < \mu_0(\Omega)$ hinreichend klein, so gibt es eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta u = F(u).$$

c) Es gibt eine Lipschitz-stetige Funktion $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, so dass die Gleichung

$$-\Delta u(x) = F(u(x), x)$$

nicht lösbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie in b) die Stetigkeit des Operators $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. *Verwenden Sie in c) Eigenfunktionen.*

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Ein Fixpunktsatz).

Sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ stetig und kompakt. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gelte: Jedes $u \in X$, welches für ein $\lambda \in [0, 1]$ die Relation $\lambda T u = u$ erfüllt, erfüllt auch die Abschätzung $\|u\|_X \leq M$. Zeigen Sie, dass T einen Fixpunkt hat.