technische universität dortmund
fakultät für mathematik

PROF. DR. B. SCHWEIZER
MAIK URBAN

SOMMERSEMESTER 2016
10.05.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 5

Abgabe am Dienstag, den 24.05.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eine nichtlineare Poisson-Gleichung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $n > 2$. Zeigen Sie die Existenz einer nicht-trivialen ($u \neq 0$) schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$-\Delta u = |u|^{q-1}\, u \quad \text{ in } \Omega,$$

wobei $2 < q + 1 < {}^{2n}/_{(n-2)}$ erfüllt sein soll.
Anleitung: Verwenden Sie die Nebenbedingung $\Phi(u) = \|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = 1$ *und bringen Sie den Lagrange-Multiplikator durch Skalierung auf den gewünschten Wert.*

Folgende Aufgabe aus der Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I sehen Sie jetzt mit anderen Augen.

Aufgabe 2 (Endlich-dimensionale Approximation und kompakte Einbettung).
Auf dem Intervall $\Omega = (0, 1)$ sollen Projektionsoperatoren untersucht werden. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, betrachten wir die Stützstellen $x_m := {}^m/_n$, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, und die Intervalle $I_m := (x_m, x_{m+1})$. Dazu seien die Projektionen $f_n : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ auf stückweise konstante Funktionen definiert durch:

$$f_n : u \mapsto \bar{u}, \qquad \text{wobei} \quad \bar{u}(x) := \frac{1}{|I_m|} \int_{I_m} u(\xi)\, \mathrm{d}\xi \quad \text{für alle } x \in I_m.$$

Zeigen Sie für die abgeschlossenen Kugeln $B_V := \overline{B_R(0)} \subset V := H^1(\Omega)$ und $B_X := \overline{B_R(0)} \subset X := L^2(\Omega)$ und mit der Identifikation $j : u \mapsto u$ die nachfolgenden Aussagen.

a) $f_n \to j$ in $C^0(B_V, X)$ für $n \to \infty$. Der Spann $\operatorname{span}\big(f_n(B_V)\big)$ ist endlich-dimensional und die Menge $f_n(B_V) \subset X$ ist beschränkt.

b) $f_n \not\to j$ in $C^0(B_X, X)$.

Folgern Sie aus a), dass die stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Eine einfache Variante der Fredholm-Alternative).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda \in \mathbb{C}$ betragsmäßig kleiner als der kleinste Eigenwert von $-\Delta$, also $|\lambda| < \lambda_0 := \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} / \|u\|^2_{L^2(\Omega)})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ die Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = f \qquad \text{in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.
Anleitung: Verwenden Sie den Lösungsoperator $(-\Delta)^{-1}$ *der Poisson-Gleichung. Zeigen und verwenden Sie die Abschätzung* $\|(-\Delta)^{-1}\|_{L(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq {}^1/_{\lambda_0}$.