technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
03.05.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 4

Abgabe am Dienstag, den 10.05.2016, im Raum M/642 (bis 12 Uhr)

Aufgabe 1.

a) **Quasikonvexität im Eindimensionalen.**
Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, falls für jedes beschränkte, offene Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, jedes $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$ gilt

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|I|} \int_a^b f\big(\xi + \varphi'(x)\big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen f auch quasikonvex sind.

b) **Schwache Unterhalbstetigkeit des relaxierten Funktionals.**
In der Vorlesung wurde das relaxierte Funktional A_R eingeführt (siehe auch [1, Definition 15.7]). Zeigen Sie, dass A_R schwach unterhalbstetig ist.

Aufgabe 2 (Mittelwert-Nebenbedingung).
Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und das Funktional $A(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \to \min$ auf dem Raum $X := H_0^1(\Omega)$. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ sei eine Nebenbedingung definiert durch

$$\Phi(u) := \int_\Omega u \overset{!}{=} M\,.$$

Zeigen Sie die Existenz eines Minimierers u und leiten Sie die Gleichung für u ab.

Aufgabe 3 (Brouwer'scher Fixpunktsatz und Variationsungleichungen).
Wir haben mit Hilfe des Brouwer'schen Fixpunktsatzes den Existenzsatz für Variationsungleichungen bewiesen, also die Lösbarkeit von Variationsungleichungen auf abgeschlossenen konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass auch umgekehrt mit Hilfe des Existenzsatzes der Brouwer'sche Fixpunktsatz bewiesen werden kann.

Literatur

[1] B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Heidelberg (2013)