technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Maik Urban

Sommersemester 2016
26.04.2016

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 3

Abgabe am Dienstag, den 03.05.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Ein nichtlineares Randwertproblem).
Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass für zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$ gilt: $0 < a \le \beta'(z) \le b$. Auf dem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei eine rechte Seite gegeben durch $f_0 \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass man eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_0 \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Variationsproblems finden kann.

Aufgabe 2 (Direkte Methode und Sobolev-Einbettung).
Es sei $X \coloneqq H^1_0(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt ist. Weiterhin sei $A : X \to \mathbb{R}$ durch

$$A(u) \coloneqq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

gegeben. Gegeben sei folgendes Minimierungsproblem:
Finde $u \in X$, so dass

$$A(u) = \inf_{v \in X} A(v)$$

unter der Nebenbedingung

$$\Phi(u) \coloneqq \int_\Omega |u|^6 \overset{!}{=} 1\,.$$

Dieses Minimierungsproblem ist nicht mit der Direkten Methode lösbar.

a) Bestimmen Sie alle Voraussetzungen der Direkten Methode, die in obigem Minimierungsproblem erfüllt sind.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge (u_k) in X mit $\|u_k\|_{L^6} = 1$, so dass $u_k \rightharpoonup u$ in X, aber $\|u\|_{L^6} \neq 1$.

Tipp: $|u_k|^6$ muss eine Dirac-Distribution approximieren.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Punktweise und schwache Konvergenz).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und (u_k) eine Folge in $L^2(\Omega)$. Die Folge sei schwach konvergent gegen $\bar{u}$ und konvergiere punktweise fast überall gegen $\tilde{u}$. Beweisen Sie mit dem Satz von Egoroff, dass dann $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Aufgabe 4 (Schwache Unterhalbstetigkeit eines nicht-konvexen Funktionals).

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, der Koeffizient $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei stetig. Zeigen Sie, dass das Funktional $A : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$A(u) \coloneqq \int_\Omega k(u)|\nabla u|^2$$

schwach unterhalbstetig ist. Verwenden Sie die Rellich-Einbettung und den Satz von Egoroff, aber keine Stützebenen. Vergleichen Sie auch mit Satz 2.2.