Blatt 13 5.7.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Ein Existenzsatz für Variationsungleichungen] Formulieren und beweisen Sie einen Existenzsatz für Variationsungleichungen. Dabei soll $F : K \to X'$ monoton sein, $K \subset X$ eine geeignete Teilmenge eines Banachraumes. Die Behauptung ist, dass für jedes $b \in X'$ eine Lösung $u \in K$ existiert von $\langle Fu - b, v - u\rangle \geq 0 \; \forall v \in K$. Zeigen Sie dazu:

a) Das Variationsproblem ist gelöst, falls

$$S(v) := \{u \in K \,|\, \langle Fv - b, v - u\rangle \geq 0\} \,, \qquad S := \bigcap_{v \in K} S(v) \neq \emptyset \,.$$

b) Wegen der Eigenschaft, die in einer vorherigen Übung gezeigt wurde, genügt es, folgendes zu zeigen: Für endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in K$ gilt

$$S(v_1) \cap ... \cap S(v_k) \neq \emptyset \,.$$

Verwenden Sie hierbei den Satz von Eberlein-Smulian.

c) Lösen Sie endlichdimensionale Probleme mit dem endlichdimensionalen Satz über Variationsungleichungen.

Abgabe am 12.7.22