

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Operatoren mit der Bedingung (M)] Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \rightarrow X'$ ein Operator. Wir sagen, dass F die Bedingung (M) erfüllt, falls folgendes gilt:

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, \quad Fu_k \rightharpoonup b \text{ in } X', \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Fu_k, u_k \rangle_X \leq \langle b, u \rangle_X$$

impliziert $Fu = b$.

Zeigen Sie:

- a) Ist $F : X \rightarrow X'$ monoton und endlichdimensional stetig, so ist Bedingung (M) erfüllt.
- b) Wenn F die Bedingung (M) erfüllt und $B : (X, \text{schwach}) \rightarrow (X', \text{stark})$ stetig ist, dann erfüllt auch $F + B$ die Bedingung (M).

Aufgabe 2. [Endliche Durchschnitte Eigenschaft] Zeigen Sie, dass jede kompakte Menge K die folgende endliche Durchschnitte Eigenschaft besitzt: Sei $(S_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen, $S_i \subset K$ für alle $i \in I$, so dass jeder endliche Durchschnitt von S_i -Mengen nichtleer ist. Dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} S_i$ nichtleer.

Abgabe am 5.7.22