Blatt 11 21.6.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Semilineare Gleichung mit Banach'schem Fixpunktsatz] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

a) Für F beschränkt ist die Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto F \circ u$$

stetig. Für F Lipschitz-stetig ist $\mathcal{F}$ ebenfalls Lipschitz-stetig.

b) Falls F Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstanten μ, $\mu < \mu_0(\Omega)$ hinreichend klein, so gibt es eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta u = F(u)\,.$$

c) Es gibt eine Lipschitz-stetige Funktion $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, so dass die Gleichung $-\Delta u(x) = F(u(x), x)$ nicht lösbar ist.

Verwenden Sie in b) den Banach'schen Fixpunktsatz und die Stetigkeit des Operators $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Verwenden Sie in c) Eigenfunktionen.

Aufgabe 2. [Ein Fixpunktsatz] Sei X ein Banachraum, $T : X \to X$ stetig und kompakt. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gelte: Jedes $u \in X$, welches für ein $\lambda \in [0, 1]$ die Relation $\lambda T u = u$ erfüllt, erfüllt auch die Abschätzung $\|u\|_X \leq M$. Zeigen Sie, dass T einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 3. [Eindeutigkeit für mehrwertige Monotone Operatoren] Für mehrwertige strikt monotone Operatoren $F : X \supset K \to X'$ sind Lösungen $u \in K$ von $F(u) \ni b$ eindeutig. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $F(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in X$ sind auch Lösungen $u \in K$ von $\langle \varphi - b, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K,\ \varphi \in F(u)$ eindeutig.

Abgabe am 28.6.22