Blatt 10 14.6.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Brouwer'scher Fixpunktsatz und Variationsungleichungen] Wir haben mit Hilfe des Brouwer'schen Fixpunktsatzes einen Existenzsatz bewiesen, die Lösbarkeit von Variationsungleichungen auf abgeschlossenen konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass man auch umgekehrt mit dem Existenzsatz den Brouwer'schen Fixpunktsatz beweisen kann.

Aufgabe 2. [Eine Fredholm-Alternative] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda \in \mathbb{C}$ betragsmäßig kleiner als der kleinste Eigenwert von $-\Delta$, also $|\lambda| < \lambda_0 := \inf_{0\neq u\in H_0^1(\Omega)} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}/\|u\|^2_{L^2(\Omega)})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ die Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = f \quad \text{in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.
Anleitung: Verwenden Sie den Lösungsoperator $(-\Delta)^{-1}$ der Poisson-Gleichung mit Nullrandwerten. Zeigen und verwenden Sie die Abschätzung $\|(-\Delta)^{-1}\|_{L(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq 1/\lambda_0$.

Aufgabe 3. [Eine nichtlineare elliptische Gleichung] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, die für ein $\alpha \in [0, 1)$ die Wachstumsbedingung $|g(\xi)| \leq C\,(|\xi|^\alpha + 1)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$-\Delta u + g(\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ besitzt. Verwenden Sie den Schauder'schen Fixpunktsatz und die $H^2(\Omega)$-Regularität von Lösungen.

Abgabe am 21.6.22