Blatt 9 7.6.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Eine nichtlineare Poisson-Gleichung] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $n > 2$. Zeigen Sie die Existenz einer nicht-trivialen ($u \neq 0$) schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$-\Delta u = |u|^{q-1} u \quad \text{ in } \Omega \,,$$

wobei $2 < q+1 < 2n/(n-2)$ erfüllt sein soll.
Anleitung: Verwenden Sie die Nebenbedingung $\Phi(u) = \|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} = 1$ und bringen Sie den Lagrange-Multiplikator durch Skalierung auf den gewünschten Wert.

Aufgabe 2. [Minimale Graphen] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Lipschitz-Rand. Zeigen Sie die schwache Unterhalbstetigkeit des Flächenfunktionals

$$A(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \quad \text{ für } u \in W^{1,1}(\Omega) \,.$$

Für $g \in W^{1,1}(\Omega)$ sei $u \in W^{1,1}(\Omega)$ ein Minimierer von A unter den Nebenbedingungen

$$u = g \text{ auf } \partial\Omega \quad \text{und} \quad \int_\Omega u = 1 \,.$$

Welche Gleichung löst u?

Aufgabe 3. [Darstellung als curl] Sei $\Omega = [0, L)^3 \subset \mathbb{R}^3$ der dreidimensionale Würfel. Die periodischen Funktionen $H_\#^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ auf Ω sind solche Funktionen $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit verschwindendem Integral, deren periodische Fortsetzung in $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ist. Wir fordern zusätzlich, dass das Integral über Ω verschwindet.
Zeigen Sie: Für jedes f im Dualraum $H_\#^1(\Omega, \mathbb{R}^3)'$ besitzt das Funktional

$$A(w) = \int_\Omega |\operatorname{curl} w|^2 + |\operatorname{div} w|^2 - \langle f, w \rangle$$

ein Minimum $w \in H_\#^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.
Anleitung: Zeigen Sie die Koerzivität des Funktionals mit einer partiellen Integration (ohne Randterme wegen Periodizität) und der Tatsache, dass sich das Funktional A einfacher schreiben lässt.
Folgern Sie einen Darstellungssatz. Jedes $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot f = 0$ und $\int_\Omega f = 0$ lässt sich als Rotation schreiben: Es existiert $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\operatorname{curl} v = f \quad \text{ in } \Omega \,.$$

Dabei kann v selbst divergenzfrei gewählt werden, es gilt sogar $v = \operatorname{curl} w$ für ein $w \in H^1_\#(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Weiterhin gilt eine Abschätzung $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Konstruieren Sie dafür ein geeignetes w mit dem obigen Funktional. Lösen Sie die Gleichung $\Delta\Phi = \rho := \operatorname{div} w$ um nachzuweisen, dass $\operatorname{div} w = 0$ gilt.

Abgabe am 14.6.22