Blatt 8 31.5.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Direkte Methode und Sobolev-Einbettung] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, wir betrachten auf $X := H_0^1(\Omega)$ das Variationsproblem $\int_\Omega |\nabla u|^2 \to \min$ unter der Nebenbedingung $\Phi(u) = \int_\Omega |u|^6 \overset{!}{=} 1$. Dieses Problem ist nicht mit der Direkten Methode lösbar. Zeigen Sie: Es gibt $u_k \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{L^6(\Omega)} = 1$, aber $\|u\|_{L^6(\Omega)} \neq 1$. Hinweis: $|u_k|^6$ muss eine Dirac-Distribution approximieren.

Aufgabe 2. [Schwache Unterhalbstetigkeit, nicht-konvex] Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, der Koeffizient $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei stetig. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$A : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad A(u) := \int_\Omega k(u)|\nabla u|^2$$

schwach unterhalbstetig ist. Verwenden Sie die Rellich Einbettung und den Satz von Egoroff, aber keine Stützebenen.

Aufgabe 3. [Mittelwert-Nebenbedingung] Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und das Funktional $A(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \to \min$ auf $X = H_0^1(\Omega)$. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ sei eine Nebenbedingung definiert durch

$$\Phi(u) = \int_\Omega u \overset{!}{=} M\,.$$

Zeigen Sie die Existenz eines Minimierers u und leiten Sie die Gleichung für u ab.

Abgabe am 7.6.22