Blatt 7 24.5.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Konvexe Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind stetig] Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
Anleitung: Für einen fixierten Punkt $x_0 \in \Omega$ finden Sie einen zunächst einen Radius $r > 0$, so dass f auf $\bar{B}_r(x_0)$ beschränkt ist durch eine Zahl $M = M(x_0, r)$. Hierfür reicht es, $n + 1$ Punkte in Ω so zu wählen, dass jeder Punkt in $\bar{B}_r(x_0)$ als Konvexkombination dieser Punkte geschrieben werden kann. Die Konvexität von f liefert die obere Abschätzung. Für die untere Abschätzung verwenden Sie zusätzlich den Punkt x_0. Für jede Gerade durch x_0 können Sie aus der Beschränktheit von f die Lipschitz-Stetigkeit auf der Geraden schließen.

Aufgabe 2. [Ein interessantes Variationsproblem] Auf $X = H_0^1((0,1), \mathbb{R})$ betrachten wir $A(u) := \int_0^1 (1 - |\partial_x u|^2)^2 + |u|^2$, wobei wir $A(u) = +\infty$ zulassen. Überprüfen Sie die Bedingungen (A1)–(A3), zusätzlich die Unterhalbstetigkeit und die Konvexität.

Aufgabe 3. [Quasikonvexität im Eindimensionalen] Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, falls für jedes beschränkte, offene Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, jedes $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$ gilt

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|I|} \int_a^b f(\xi + \varphi'(x))\, dx\,.$$

Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen f auch quasikonvex sind.

Aufgabe 4. [Punktweise und schwache Konvergenz] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, u_k eine Folge in $L^2(\Omega)$. Die Folge sei schwach konvergent gegen $\bar{u}$ und konvergiere punktweise fast überall gegen $\tilde{u}$. Beweisen Sie mit dem Satz von Egoroff, dass dann $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle x.

Abgabe am 31.5.22